مجله علمی پژوهشی «علوم و فناوری‌های پدافند نوین»
سال هشتم، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۶؛ ص ۱۴۵-۱۳۳

جواب‌های خوش‌بینانه و بدبینانه بازی‌های ماتریسی تک‌هدفی و چندهدفی با عایدی‌های فازی و تحلیل برخی موارد نظامی

حمید بیگدلی[۱]، حسن حسن‌پور[۲*]، جواد طیبی[۳]

۱- دانشجوی دکتری، ۲- استادیار، دانشگاه بیرجند ۳- استادیار، دانشگاه صنعتی بیرجند

(دریافت: ۹۴/۱۲/۰۵، پذیرش: ۹۵/۱۰/۰۷)

چکیده

در این تحقیق یک روش جدید برای حل مسائل بازی با مجموع صفر دو نفره تک‌هدفی و چندهدفی با عایدی‌های فازی پیشنهاد شده است. با استفاده از مفهوم تقریب نزدیک‌ترین بازه اعداد فازی، مسئله بازی تک‌هدفی به یک مسئله بازی تک‌هدفی با عایدی‌های بازه‌ای تبدیل می‌شود و یک جفت مسئله برنامه‌ریزی خطی برای محاسبه جواب‌های خوش‌بینانه و بدبینانه هر یک از بازیکنان به‌دست می‌آید. با استفاده از قضیه قوی دوگانی ثابت می‌شود که در بازی ماتریسی بازه مقدار، ارزش خوش‌بینانه بازی برای بازیکن ۱ با ارزش بدبینانه بازی برای بازیکن ۲، و ارزش بدبینانه بازی برای بازیکن ۱ با ارزش خوش‌بینانه بازی برای بازیکن ۲ برابرند. سپس دو مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفی برای تعیین ارزش‌های خوش‌بینانه و بدبینانه بازی چندهدفی بازه مقدار و راهبردهای بهینه پارتوی متناظر آن‌ها برای هر یک از بازیکنان ارائه می‌شود. به عنوان یک کاربرد، نبرد بین نیروهای آمریکایی و آلمانی در جنگ جهانی دوم در شکاف آورانشه از دید نظریه بازی‌ها بررسی می‌شود و نشان داده می‌شود که با استفاده از روش مذکور راهبردهای بهینه به‌دست آمده از این مدل برای فرماندهان منطبق بر تحلیل دکترین نظامی آمریکا از این تصمیم است. درنهایت، مثال دیگری از یک نبرد نظامی بررسی می‌شود که در آن هر یک از فرماندهان دو هدف دارند.

کلیدواژه‌ها: بازی مجموع صفر فازی، راهبرد بهینه، عایدی فازی، تقریب نزدیک‌ترین بازه، تحلیل نبرد، بازی چندهدفی

Optimistic and Pessimistic Solutions of Single and Multi-Objective Matrix Games with Fuzzy Payoffs and Analysis of Some Military Cases

H. Bigdeli, H. Hassanpour*, J. Tayyebi
University of Birjand
(Received: 24/02/2016; Accepted: 27/12/2016)

Abstract

A new method for solving single-objective and multi-objective two-person zero-sum game problems with fuzzy payoffs is proposed in this paper. The single-objective game problem with fuzzy payoffs is converted to a single-objective game problem with interval payoffs by considering the concept of nearest interval approximation of fuzzy numbers, and a pair of linear programming problems is obtained to compute the optimistic and pessimistic solutions for each of the players. By the strong duality theorem of linear programming, it is proved that the optimistic value of Player I is equal to the pessimistic value of Player II and also, the pessimistic value of Player I is equal to the optimistic value of Player II in interval-valued matrix game. Then, two multiobjective linear programming problems are introduced to compute the optimistic and pessimistic values of interval-valued multiobjective game and their corresponding Pareto optimal strategies for each of the players. As an application, the battle between U.S. and Germany forces in Avranches Gap in World War II is discussed by game theory and is concluded that the obtained optimal strategies of model by the mentioned method for commanders is identical with the analysis of the U.S. military doctrine. Finally, an example of a military battle is considered in which each of the commanders has two objectives.

Keywords: Fuzzy Zero-Sum Game, Optimal Strategy, Fuzzy Payoff, Nearest Interval Approximation, Analysis Of Battle, Multi-Objective Game.

*Corresponding Author E-mail: hhassanpour@birjand.ac.ir

۱. مقدمه

نظریه بازی شاخه‌ای از تحقیق در عملیات است که رفتار ریاضی حاکم بر یک موقعیت راهبردی را مورد بررسی قرار می‌دهد. پس از انتشار کتاب «نظریه بازی‌ها و رفتار اقتصادی» توسط وان‌نیومن و مورگنسترن [۱]، نظریه بازی به سرعت رشد یافت و کاربردهای وسیعی در علوم مختلف پیدا کرد. سرهنگ (بازنشسته) الیور هایوود [۲] در مقاله مشهور خود اهمیت نظریه بازی‌ها را در تصمیم‌گیری فرماندهی نشان داد. او نبردهای مختلفی از جنگ جهانی دوم را از دید نظریه بازی‌ها بررسی کرد و نتیجه گرفت که تحلیل دکترین تصمیم‌گیری نظامی مشابه با جواب به‌دست آمده از نظریه بازی‌هاست. ارزیابی سرهنگ هایوود انجمن تحقیق در عملیات را تشویق کرد که روش‌های نظریه بازی را بیشتر مورد بررسی قرار دهند و در تصمیم‌گیری‌های نظامی از این نظریه استفاده کنند. مسائل بازی به دو دسته مهم طبقه‌بندی می‌شوند: بازی‌های همکارانه و بازی‌های غیر همکارانه [۳ و ۴]. بازی‌های با مجموع صفر (بازی‌های ماتریسی) یک دسته مهم از بازی‌های غیر همکارانه می‌باشند. در نظریه بازی کلاسیک، اطلاعات بازیکنان به صورت قطعی است اما بسیاری از مسائل دنیای واقعی دارای عدم قطعیت می‌باشند. دو نوع عدم قطعیت در اطلاعات وجود دارد که یکی ناشی از تصادفی بودن اطلاعات است و دیگری ناشی از ابهام در اطلاعات می‌باشد. نظریه مجموعه‌های فازی برای بیان نادقیقی پدیدهایی که ناشی از شفاف نبودن و ابهام در اطلاعات است، مورد استفاده قرار می‌گیرد و نظریه احتمال در بیان عدم قطعیت در فرآیندهای تصادفی کاربرد دارد. در آزمایش‌هایی که خروجی آن‌ها به طور دقیق قابل مشاهده است (مانند نتیجه حاصل از پرتاب سکه یا تاس) از نظریه احتمال استفاده می‌شود و در مواردی که خروجی آن به طور دقیق قابل مشاهده نیست (مانند اطلاعات مربوط به میزان ادوات نظامی و نفرات دشمن) نظریه مجموعه‌های فازی وسیله مناسبی برای مدل‌سازی است. نظریه مجموعه‌های فازی به دلیل توانایی در مدل‌سازی مسائل دارای اطلاعات مبهم و استنتاج در شرایط نادقیق، امروزه به طور گسترده در مسائل کاربردی در حوزه‌هایی از قبیل مدیریت، اقتصاد، علوم نظامی و غیره مورد استفاده قرار می‌گیرد [۹-۵]. اولین مطالعه از بازی‌های ماتریسی با عایدی‌های فازی توسط کامپوس [۱۰] انجام شد. بکتور و کاندرا [۱۱] روش‌های برنامه‌ریزی خطی را برای حل بازی‌های ماتریسی فازی ارائه دادند. لی [۱۲] یک روش برنامه‌ریزی خطی دوسطحی را برای حل بازی‌های ماتریسی با عایدی‌های فازی مثلثی ارائه داد. کلمنت و فرناندز [۱۳] روش دیگری برای تحلیل بازی‌های ماتریسی فازی پیشنهاد کردند که راهبردهای امنیتی بهینه پارتوی بازیکنان را به‌دست می‌آورد. کولینز و اچ یو [۱۴] بازی‌های ماتریسی بازه مقدار را با مفاهیم فازی در نظر گرفتند. لی [۱۵] یک روش برای محاسبه ارزش‌های فازی بازی با عایدی‌های مثلثی بدون تعیین راهبرد بهینه بازیکنان ارائه داد. کاندرا و آگاروال [۱۶] یک یادداشت بر روی کار لی نوشته و یک روش برای محاسبه راهبرد بهینه بازیکنان ارائه دادند. لی و نان [۱۷] یک روش برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای را برای حل بازی‌های مجموع صفر با عایدی‌های فازی ارائه دادند. دیوتا و گاپتا [۱۸] مدل‌های بازی ماتریسی مائدا [۱۹] و کانلین و کیونگ [۲۰] را با اعداد فازی مثلثی متقارن و نامتقارن توسعه دادند. سیخ و همکارانش [۲۱] یک روش بر اساس آلفا-برش‌های اعداد فازی برای حل این نوع از بازی‌ها ارائه دادند. در دنیای واقعی بازیکنان به دنبال بهینه‌سازی چندین هدف به طور هم‌زمان هستند. نیشیزاکی و ساکاوا [۲۲] اولین کسانی بودند که به طور جدی بازی‌های چندهدفی را در محیط فازی مورد مطالعه قرار دادند. نویسندگان در مقاله دیگری مفهوم راهبردهای رضایت‌بخش را برای بازیکنان در یک بازی ماتریسی چندهدفی با عایدهای فازی معرفی نموده و روشی برای حل این مسائل ارائه کرده‌اند [۲۳].

در این مقاله، بازی‌های مجموع صفری در نظر گرفته می‌شود که در آن عایدی بازیکنان اعداد فازی و راهبردهای محض و آمیخته بازیکنان قطعی (غیرفازی) هستند. در این مقاله با استفاده از مفهوم تقریب نزدیک‌ترین بازه اعداد فازی، مسئله به صورت یک بازی تک‌هدفی و چندهدفی بازه‌ای تبدیل می‌شود و جواب‌های خوش‌بینانه و بدبینانه بازیکنان محاسبه می‌شود. سادگی و سرعت حل مسئله از امتیازات این روش است که این کار با ارائه چند مثال نظامی نشان داده می‌شود. ادامه مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است. در ادامه مفاهیم پایه‌ای نظریه مجموعه‌های فازی، نظریه بازی‌ها و بهینه‌سازی چندهدفی ارائه می‌شود. در بخش ۲ یک روش برای حل بازی‌های مجموع صفر تک‌هدفی با عایدی‌های فازی ارائه می‌گردد. در بخش ۳، بازی‌های ماتریسی چندهدفی با عایدی‌های فازی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در بخش ۴ یک نبرد اتفاق افتاده در جنگ جهانی دوم مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرد و سپس مثالی از بازی چندهدفی در حوزه نظامی در بخش ۵ بررسی می‌شود.

۱-۱. مفاهیم اولیه مجموعه‌های فازی و حساب بازه‌ای

در این زیر بخش برخی از تعاریف و مفاهیم اولیه نظریه مجموعه‌های فازی [۲۴] که مورد نیاز بخش‌های بعد است، یادآوری می‌شود.

یک مجموعه فازی به صورت زیرمجموعه $\tilde{a}$ از مجموعه مرجع $X \subset \mathbb{R}$ با تابع عضویت $\mu_{\tilde{a}} : X \to [0,1]$ تعریف

می‌شود که به هر عنصر $x \in X$ یک عدد حقیقی $\mu_{\tilde{a}}(\mathrm{x})$ را از بازه $[۰,۱]$ به نام درجه عضویت x تخصیص می‌دهد.

تبصره ۱: بدیهی است که هر مجموعه معمولی مانند A را می‌توان مجموعه‌ای فازی در نظر گرفت که تابع عضویت آن، همان تابع نشانگر مجموعه A است.

تعریف ۲-۱ [۲۴]. مجموعه فازی $\tilde{a}$ در مجموعه اعداد حقیقی را که تابع عضویت آن $\mu_{\tilde{a}}(\mathrm{x})$ در شرایط زیر صدق کند، یک عدد فازی گویند.

- $\mu_{\tilde{a}}: \mathbb{R} \to [۰,۱]$ یک تابع نیمه پیوسته باشد.
- در خارج از بازه‌ای مانند $[a,\mathrm{d}]$، $\mu_{\tilde{a}}(\mathrm{x}) = ۰$.
- اعدادی حقیقی مانند b و c موجود باشند به طوری که $a \le b \le c \le d$ و

الف) $\mu_{\tilde{a}}(\mathrm{x})$ در $[a,\mathrm{b}]$ صعودی باشد،

ب) $\mu_{\tilde{a}}(\mathrm{x})$ در $[\mathrm{c},\mathrm{d}]$ نزولی باشد،

ج) در $[\mathrm{b},\mathrm{c}]$، $\mu_{\tilde{a}}(\mathrm{x}) = ۱$.

برای هر $\alpha \in (۰,۱]$، برش آلفای مجموعه فازی $\tilde{a}$ که با $\tilde{a}_\alpha$ نمایش داده می‌شود یک مجموعه معمولی است که به صورت $\tilde{a}_\alpha = \{\mathrm{x} \mid \mu_{\tilde{a}}(\mathrm{x}) \ge \alpha\}$ تعریف می‌شود و چنانچه $\alpha = ۰$، $\tilde{a}_۰$ به صورت $\mathrm{cl}\{\mathrm{x} \mid \mu_{\tilde{a}}(\mathrm{x}) > ۰\}$ تعریف می‌شود که cl به معنی بستار مجموعه است. تکیه‌گاه $\tilde{a}$ که با $Supp(\tilde{a})$ نمایش داده می‌شود، مجموعه تمام نقاط $x \in X$ است که $\mu_{\tilde{a}}(\mathrm{x}) > ۰$. هر α- برش عدد فازی $\tilde{a}$ یک بازه بسته به صورت $\left[a_\alpha^L, a_\alpha^R\right]$ است که در آن

$$a_\alpha^L = \inf\{\mathrm{x} \in \mathbb{R} \mid \mu_{\tilde{a}}(\mathrm{x}) \ge \alpha\},$$
$$a_\alpha^R = \sup\{\mathrm{x} \in \mathbb{R} \mid \mu_{\tilde{a}}(\mathrm{x}) \ge \alpha\}.$$

هسته عدد فازی $\tilde{a}$ با $core(\tilde{a})$ نمایش داده شده و به صورت $core(\tilde{a}) = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} \mid \mu_{\tilde{a}}(\mathrm{x}) = ۱\}$ تعریف می‌شود. عدد فازی مثلثی $\tilde{a} = (a^l, a^m, a^r)$، یک عدد فازی خاص است که تابع عضویت آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \dfrac{(\mathrm{x} - a^l)}{(a^m - a^l)} & a^l \le x \le a^m \\ \dfrac{(a^r - x)}{(a^r - a^m)} & a^m \le x \le a^r \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad (۱)$$

که در آن، a^m نقطه میانی و a^l و a^r به ترتیب نقاط انتهایی چپ و راست $Supp(\tilde{a})$ می‌باشند. از رابطه فوق به سادگی نتیجه می‌شود که هر عدد فازی مثلثی را می‌توان به طور مستقیم از ۰- برش و ۱- برش آن به‌دست آورد. در واقع $\left[a_\alpha^L, a_\alpha^R\right] = \alpha\tilde{a}_۱ + (۱-\alpha)\tilde{a}_۰$ است.

در بخش‌های بعد، به بعضی از اعمال حسابی روی بازه‌ها [۲۱] نیاز است که در ادامه به آن‌ها اشاره می‌شود.

فرض کنید $a = \left[a^L, a^R\right]$ و $b = \left[b^L, b^R\right]$ دو بازه باشند. در این صورت

$$a + b = \left[a^L + \mathrm{b}^L, a^R + \mathrm{b}^R\right]$$
$$a - b = \left[a^L - \mathrm{b}^R, a^R - \mathrm{b}^L\right]$$
$$\lambda a = \begin{cases} \left[\lambda a^L, \lambda a^R\right] & \lambda \ge ۰ \\ \left[\lambda a^R, \lambda a^L\right] & \lambda < ۰ \end{cases}$$

که در آن، λ یک عدد حقیقی است.

مجموعه تمام اعداد فازی و مجموعه تمام بازه‌های بسته در $\mathbb{R}$ به ترتیب با $F(\mathbb{R})$ و $P(\mathbb{R})$ نمایش داده می‌شود. با توجه به تبصره ۱ داریم: $P(\mathbb{R}) \subset F(\mathbb{R})$.

تعریف۲-۲ [۲۵]. عملگر $C: F(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$ که برای هر $\tilde{a} \in F(\mathbb{R})$، سه خاصیت زیر را داشته باشد، یک عملگر تقریب بازه نامیده می‌شود:

۱) $C(\tilde{a}) \subset Supp(\tilde{a})$

۲) $core(\tilde{a}) \subset C(\tilde{a})$

۳) $\forall \varepsilon > ۰\ \exists \delta > ۰\ s.t.\ d(\tilde{a}, \tilde{\mathrm{b}}) < \delta \Rightarrow d(\mathrm{C}(\tilde{a}), \mathrm{C}(\tilde{\mathrm{b}})) < \varepsilon$

که در آن، $d: F(\mathbb{R}) \to [۰,\infty)$، یک متر تعریف شده روی خانواده اعداد فازی است.

گزاره ۲-۱ [۲۵]. فرض کنید $\tilde{a}$ یک عدد فازی و برای هر $\alpha \in [۰,۱]$، $\left[a_\alpha^L, a_\alpha^R\right]$، α- برش آن باشد. تقریب نزدیک‌ترین بازه $\tilde{a}$، بازه $C_d(\tilde{a}) = \left[\mathrm{c}^L, \mathrm{c}^R\right]$ است که در آن

$$c^R = \int_۰^۱ a_\alpha^R d\alpha,\ c^L = \int_۰^۱ a_\alpha^L d\alpha.$$

۲-۱. بازی با مجموع صفر

یک بازی با مجموع صفر دو نفره به‌صورت سه‌تایی $G = (\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{A})$ نمایش داده می‌شود که در آن، X و Y

فضاهای راهبردهای آمیخته برای بازیکنان ۱ و ۲ هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$X = \left\{ \mathrm{x} \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1,\dots,m \right\}, \qquad (2)$$

$$Y = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, y_j \geq 0, j = 1,\dots,n \right\}. \qquad (3)$$

$A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ ماتریس عایدی بازی نامیده می‌شود. a_{ij}عایدی بازیکن ۱ است در صورتی‌که بازیکن ۱ راهبرد i و بازیکن ۲ راهبرد j را انتخاب نماید. فرض می‌شود که بازیکن ۱ به دنبال بیشینه‌سازی عایدی و بازیکن ۲ در پی کمینه‌سازی زیان است. زمانی که بازیکن ۱ راهبرد آمیخته $x \in X$ و بازیکن ۲ راهبرد آمیخته $y \in Y$ را انتخاب می‌کنند، اسکالر $x^T Ay$ عایدی مورد انتظار بازیکن ۱ خواهد بود و طبیعتاً $-x^T Ay$ عایدی بازیکن ۲ می‌باشد. نیومن نشان داد که در بازی‌های با مجموع صفر دو نفره داریم:

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} x^T Ay = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} x^T Ay \quad (4)$$

زوج راهبردهای $\left(\mathrm{x}^*, \mathrm{y}^*\right)$ که در رابطه فوق صدق کنند یک جواب تعادل (نقطه تعادل) نامیده می‌شود.

۳-۱. بهینه‌سازی چندهدفی

قبل از بررسی ساختار مسئله چندهدفی، چند نماد به صورت زیر معرفی می‌شود که در تعریف مفاهیم جواب مسائل بهینه‌سازی چندهدفی به‌کار گرفته می‌شوند.

برای دو بردار $z, z' \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} &z = z' \Leftrightarrow z_i = z'_i \qquad i = 1,\dots,n;\\ &z \leqq z' \Leftrightarrow z_i \leqq z'_i \qquad i = 1,\dots,n;\\ &z < z' \Leftrightarrow z_i < z'_i \qquad i = 1,\dots,n;\\ &z \leq z' \Leftrightarrow z \leqq z' \qquad z \neq z'. \end{aligned}$$

مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\min\ z(\mathrm{x}) = \left(z_1(x), z_2(x), \dots, z_k(x)\right)\\ &s.t.\quad x \in X = \left\{x \mid Ax \leq b, x \geq 0\right\} \end{aligned}$$

که در آن، برای $i = 1,\dots,k$، $z_i(x) = c_i x$، $x = (x_1,\dots,x_n)^T$، $b = (b_1,\dots,b_m)^T$، $c_i = (c_{i1},\dots,c_{in})^T$ و $A = \left[a_{ij}\right]$ یک ماتریس $m\times n$ است.

اگر مفهوم جواب بهینه برنامه‌ریزی خطی تک‌هدفی برای این مسئله به‌کار برده شود، تعریف زیر را داریم:

تعریف ۲-۳ [۲۴]. $x^* \in X$ جواب بهینه کامل مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفی گفته می‌شود هرگاه برای هر $x \in X$،

$$z_i\left(x^*\right) \leq z_i(x) \qquad i = 1,\dots,k.$$

در حالت کلی چنین جوابی برای مسائل برنامه‌ریزی چندهدفی وجود ندارد. زیرا در این مسائل چندین هدف به طور هم‌زمان کمینه می‌شوند و اهداف معمولاً در تقابل یکدیگرند. بنابراین، جواب بهینه پارتو (جواب کارا) به صورت زیر برای این مسائل تعریف می‌شود:

تعریف ۲-۴ [۲۴]. $x^* \in X$ جواب بهینه پارتوی مسئله برنامه‌ریزی چندهدفی نامیده می‌شود هرگاه نقطه‌ای مانند $x \in X$ موجود نباشد به طوری که $z(x) \leq z\left(x^*\right)$.

۲. بازی مجموع صفر تک‌هدفی با عایدی‌های فازی

در این بخش مسئله بازی تک‌هدفی در محیط فازی در نظر گرفته می‌شود. به منظور بیان ابهام و نادقیقی اطلاعات در مسائل تصمیم‌گیری، عایدی‌های بازیکنان اعداد فازی در نظر گرفته می‌شود. زمانی که یک بازیکن راهبرد خود را انتخاب می‌کند، عایدی او به صورت یک عدد فازی نمایش داده می‌شود. خروجی بازی یک ساختار مجموع صفر دارد به طوری که وقتی یک بازیکن سودی را کسب می‌کند بازیکن دیگر به همان اندازه از دست می‌دهد. ماتریس عایدی فازی زیر نمایش دهنده بازی ماتریسی با عایدی‌های فازی است:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} \dots \tilde{a}_{1n} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \tilde{a}_{m1} \dots \tilde{a}_{mn} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

فضاهای راهبردهای آمیخته بازیکنان ۱ و ۲ در روابط (۲) و (۳) نمایش داده شده است. برای حل چنین مسئله بازی با عایدی‌های فازی، هر عایدی فازی $\tilde{a}_{ij}$ به کمک تقریب نزدیک‌ترین بازه به عایدی بازه‌ای $a_{ij} \equiv \left[a_{ij}^L, a_{ij}^R\right]$ تبدیل می‌شود. بنابراین با یک مسئله بازی با عایدی‌های بازه‌ای مواجه می‌شویم. با انتخاب $x \in X$ و $y \in Y$ به ترتیب توسط بازیکنان ۱ و ۲، عایدی مورد انتظار بازیکن ۱ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$v(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} y_j = \left[\mathrm{x}^T \mathrm{A}^L \mathrm{y}, \mathrm{x}^T \mathrm{A}^R \mathrm{y}\right] \qquad (6)$$

که در آن، $A^L = \left[a_{ij}^L\right]_{m\times n}$ و $A^R = \left[a_{ij}^R\right]_{m\times n}$ می‌باشد.

برای یک بازی مجموع صفر دو نفره با عایدی‌های بازه‌ای $A = \left[\mathrm{A}^L, \mathrm{A}^R\right]$، وقتی بازیکن ۱ راهبرد $x \in X$ را انتخاب می‌کند بدترین عایدی مورد انتظارش به صورت زیر است:

$$v\left(\mathrm{x}\right) = \min_{y\in Y} x^T A y = \min_{y\in Y}\left[\mathrm{x}^T \mathrm{A}^L \mathrm{y}, \mathrm{x}^T \mathrm{A}^R \mathrm{y}\right] \tag{۷}$$

بنابراین بازیکن ۱ باید راهبرد x را طوری انتخاب کند که $v\left(\mathrm{x}\right)$ را بیشینه سازد و عایدی

$$v_I = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} x^T A y = \max_{x\in X}\min_{y\in Y}\left[\mathrm{x}^T \mathrm{A}^L \mathrm{y}, \mathrm{x}^T \mathrm{A}^R \mathrm{y}\right] \tag{۸}$$

را به‌دست آورد.

اگر بازیکن ۱ مسئله فوق را با دید خوش‌بینانه در نظر بگیرد، ارزش خوش‌بینانه بازی و راهبرد متناظر آن، با حل مسئله برنامه‌ریزی ریاضی زیر به‌دست می‌آید:

$$v_I^R = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} x^T A^R y \tag{۹}$$

مسئله $\min_{y\in Y} x^T A^R y$ یک مسئله برنامه‌ریزی خطی با فضای جواب کراندار است، بنابراین جواب بهینه آن در یکی از نقاط راسی Y اتفاق خواهد افتاد و خواهیم داشت:

$$v_I^R = \max_{x\in X}\min_{j=1,\dots,n}\sum_{i=1}^m x_i a_{ij}^R \tag{۱۰}$$

با استفاده از روش تبدیل مسائل مینیماکس به مسائل خطی [۲۶]، مسئله (۱۰) به مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \max\ & \underline{v}^R \\ s.t.\ & \sum_{i=1}^m a_{ij}^R x_i \ge \underline{v}^R \quad j=1,\dots,n \\ & \sum_{i=1}^m x_i = 1 \\ & x_i \ge 0 \quad i=1,\dots,m \end{aligned} \tag{۱۱}$$

فرض کنید $x_i' = \frac{x_i}{\underline{v}^R}$ و بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض کنید $\underline{v}^R > 0$. در این صورت به ازای $i=1,\dots,m$، $x_i' \ge 0$ و $\sum_{i=1}^m x_i' = \sum_{i=1}^m \frac{x_i}{\underline{v}^R} = \frac{1}{\underline{v}^R}$.

بنابراین مسئله (۱۱) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \min\ & \sum_{i=1}^m x_i' \\ s.t.\ & \sum_{i=1}^m a_{ij}^R x_i' \ge 1 \quad j=1,\dots,\mathrm{n} \\ & x_i' \ge 0 \quad i=1,\dots,m \end{aligned} \tag{۱۲}$$

جواب بهینه مسئله (۱۲) را می‌توان به روش سیمپلکس به‌دست آورد. ارزش خوش‌بینانه $\underline{v}^{*R}$ و راهبرد بهینه x_i^{*R} مسئله از روابط

$$x_i^{*R} = x_i'^{*}\underline{v}^{*R} \quad \text{و} \quad \underline{v}^{*R} = \frac{1}{\sum_{i=1}^m x_i'^{*R}}$$

به‌دست می‌آیند، که $\left(x_1'^{*},\dots,x_m'^{*}\right)$ جواب بهینه مسئله (۱۲) است. مشابه با روند فوق، اگر بازیکن ۱ با دید بدبینانه به مسئله نگاه کند، ارزش بدبینانه بازی و راهبرد متناظر آن از حل مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \max\ & \underline{v}^L \\ s.t.\ & \sum_{i=1}^m a_{ij}^L x_i \ge \underline{v}^L \quad j=1,\dots,n \\ & \sum_{i=1}^m x_i = 1 \\ & x_i \ge 0 \quad i=1,\dots,m \end{aligned} \tag{۱۳}$$

مجدد با فرض $x_i' = \frac{x_i}{\underline{v}^L}$ و $\underline{v}^L > 0$، مسئله (۱۳) به مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min\ & \sum_{i=1}^m x_i' \\ s.t.\ & \sum_{i=1}^m a_{ij}^L x_i' \ge 1 \quad j=1,\dots,\mathrm{n} \\ & x_i' \ge 0 \quad i=1,\dots,m \end{aligned} \tag{۱۴}$$

جواب بهینه این مسئله را می‌توان به روش سیمپلکس به‌دست آورد. درنهایت، ارزش بدبینانه $\underline{v}^{*L}$ و راهبرد بهینه x_i^{*L} توسط روابط

$$\underline{v}^{*L} = \frac{1}{\sum_{i=1}^m x_i'^{*L}} \quad \text{و} \quad x_i^{*L} = x_i'^{*}\underline{v}^{*L}$$

به‌دست می‌آیند که $\left(x_1'^{*},\dots,x_m'^{*}\right)$ جواب بهینه مسئله (۱۴) است.

مشابه با روندی که برای بازیکن ۱ تشریح شد، $\overline{w}^{*R}$، ارزش بدبینانه بازی ماتریسی بازه مقدار حاصل برای بازیکن ۲ و راهبرد بهینه متناظر آن y_j^{*R}، از حل مسئله زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \max\ & \sum_{j=1}^{n} y'_j \\ s.t.\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^R y'_j \le 1 \quad i=1,\dots,m \\ & y'_j \ge 0 \quad j=1,\dots,n \end{aligned} \tag{۱۵}$$

که در آن $y'_j = \frac{y_j}{\overline{w}^R}$ و $\sum_{j=1}^{n} y'_j = \frac{1}{\overline{w}^R}$.

همچنین ارزش خوش‌بینانه $\overline{w}^{*L}$ بازی ماتریسی بازه مقدار حاصل برای بازیکن ۲ و راهبرد متناظر آن y_j^{*L}، از حل مسئله زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \max\ & \sum_{j=1}^{n} y'_j \\ s.t.\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^L y'_j \le 1 \quad i=1,\dots,m \\ & y'_j \ge 0 \quad j=1,\dots,n \end{aligned} \tag{۱۶}$$

که در آن $y'_j = \frac{y_j}{\overline{w}^L}$ و $\sum_{j=1}^{n} y'_j = \frac{1}{\overline{w}^L}$.

قضیه ۳-۱: ارزش‌های خوش‌بینانه و بدبینانه بازی که از حل مسائل (۱۲) و (۱۵) و همچنین (۱۴) و (۱۶) به‌دست می‌آیند با هم برابرند. به عبارت دیگر $\underline{v}^{*L} = \overline{w}^{*L}$ و $\underline{v}^{*R} = \overline{w}^{*R}$.

اثبات: به آسانی می‌توان دید که مسائل (۱۲) و (۱۵) و همچنین (۱۴) و (۱۶) مسائل اولیه و دوگان برنامه‌ریزی خطی هستند. بنابراین طبق قضیه قوی دوگانی برنامه‌ریزی خطی، مقادیر بهینه توابع هدف (۱۲) و (۱۵) و همچنین (۱۴) و (۱۶) با هم برابرند، یعنی $\underline{v}^{*L} = \overline{w}^{*L}$ و $\underline{v}^{*R} = \overline{w}^{*R}$.

تبصره۲: با توجه به این واقعیت که بازیکن ۱ شخص محتاطی است، توصیه می‌شود که راهبرد به‌دست آمده از حل مسئله (۱۴) را به‌کار گیرد و همچنین با توجه به اینکه بازیکن ۲ انسان محتاطی است، توصیه می‌شود که راهبرد به‌دست آمده از مسئله (۱۵) را لحاظ کند.

۳. بازی ماتریسی چندهدفی با عایدی‌های فازی

در این بخش بازی ماتریسی چندهدفی با عایدی‌های فازی بررسی می‌شود. فرض کنید هر بازیکن p هدف داشته باشد. ماتریس‌های عایدی فازی چندگانه زیر نمایش دهنده بازی چندهدفی با عایدی‌های فازی هستند:

$$\tilde{A}^1 = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11}^1 \dots \tilde{a}_{1n}^1 \\ \vdots \ \ddots \ \vdots \\ \tilde{a}_{m1}^1 \dots \tilde{a}_{mn}^1 \end{bmatrix}, \ \dots\ , \tilde{A}^p = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11}^p \dots \tilde{a}_{1n}^p \\ \vdots \ \ddots \ \vdots \\ \tilde{a}_{m1}^p \dots \tilde{a}_{mn}^p \end{bmatrix}$$

که در آن $\tilde{A}^k$ ماتریس عایدی هدف kام بازی است. فضاهای راهبرد آمیخته برای بازیکنان ۱ و ۲ به صورت تعریف شده در روابط (۲) و (۳) هستند.

برای حل این بازی ماتریسی با عایدی‌های فازی همانند بخش قبل ابتدا تقریب نزدیک‌ترین بازه هر عدد فازی به کمک گزاره ۲-۱ به‌دست می‌آید. با این کار مسئله بازی چندهدفی با عایدی‌های فازی به مسئله بازی چندهدفی با عایدی‌های بازه‌ای تبدیل می‌شود. اکنون با انتخاب راهبردهای $x \in X$ و $y \in Y$ به ترتیب توسط بازیکنان ۱ و ۲، عایدی مورد انتظار بازی به صورت زیر می‌باشد:

$$v(\mathrm{x},\mathrm{y}) = x^T A y = \left[v^1(\mathrm{x},\mathrm{y}),\dots,v^p(\mathrm{x},\mathrm{y}) \right] \tag{۱۷}$$

که در آن $A = \left[A^1,\dots,A^p \right]$ و

$$v^k(\mathrm{x},\mathrm{y}) = x^T A^k y = x^T \left[a_{ij}^{kL}, a_{ij}^{kR} \right] y, k=1,\dots,p \tag{۱۸}$$

بازیکن ۱ (بیشینه کننده) باید راهبرد خود را چنان انتخاب کند که بیشترین عایدی را در مقابل هر راهبرد $y \in Y$ از بازیکن ۲ (کمینه کننده) کسب کند. بازیکن ۲ نیز به طریق مشابه عمل خواهد کرد. بنابراین با توجه به این رفتار منطقی، سطح امنیت هر بازیکن بدترین مقدار سود دریافتی آن بازیکن با انتخاب هر راهبردی از سوی بازیکن دیگر تعریف می‌شود. سطوح امنیتی برای بازیکنان ۱ و ۲ با توجه به تابع هدف kام به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\underline{V}^k(\mathrm{x}) = \min_{y \in Y} \left[v^{kL}(\mathrm{x},\mathrm{y}), v^{kR}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \right], k=1,\dots,p \tag{۱۹}$$

$$\overline{V}^k(\mathrm{x}) = \max_{x \in X} \left[v^{kL}(\mathrm{x},\mathrm{y}), v^{kR}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \right], k=1,\dots,p \tag{۲۰}$$

برای هر راهبرد $x \in X$، k امین سطح امنیت بازیکن ۱ با رابطه (۱۹) نشان داده می‌شود که یک مسئله برنامه‌ریزی خطی با تابع هدف بازه‌ای است. سطوح امنیتی دو بازیکن، p تایی‌هایی به صورت زیر هستند:

$$\underline{V}(\mathrm{x}) = \left(\underline{V}^1(x),\dots,\underline{V}^p(\mathrm{x}) \right) \tag{۲۱}$$

$$\overline{V}(y) = \left(\overline{V}^1(y),\dots,\overline{V}^p(y) \right) \tag{۲۲}$$

مفهوم فوق اجازه می‌دهد که بازی‌های ماتریسی چندهدفی تحت منطق بدترین حالت رفتار حریف تحلیل شوند. بازیکن ۱ باید راهبرد x خود را طوری انتخاب کند که سطوح امنیتی بازی بیشینه شود. بنابراین بازیکن ۱ با مسئله برنامه‌ریزی ریاضی زیر مواجه می‌شود:

$$\max_{x\in X} \underline{V}(\mathrm{x}) \tag{۲۳}$$

یا به طور معادل

$$\begin{aligned} &\max \left(\min_{y\in Y}\left[v^{1L}(\mathrm{x},\mathrm{y}),v^{1R}(\mathrm{x},\mathrm{y})\right],\dots,\min_{y\in Y}\left[v^{pL}(\mathrm{x},\mathrm{y}),v^{pR}(\mathrm{x},\mathrm{y})\right]\right)\\ &s.t.\ \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\\ &\qquad x_i \geq 0 \quad i=1,\dots,m \end{aligned} \tag{۲۴}$$

در حالت خوش‌بینانه، بازیکن ۱ فرض می‌کند که بازیکن ۲ می‌خواهد حداکثر مقدار سطوح امنیتی بازیکن ۱ را کمینه کند. بنابراین بازیکن ۱ تصمیم می‌گیرد تا راهبرد خود را طوری انتخاب کند که آن‌ها را بیشینه نماید. بنابراین باید مسئله زیر را حل نماید:

$$\begin{aligned} &\max \left(\min_{y\in Y} v^{1R}(\mathrm{x},\mathrm{y}),\dots,\min_{y\in Y} v^{pR}(\mathrm{x},\mathrm{y})\right)\\ &s.t.\ \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\\ &\qquad x_i \geq 0 \quad i=1,\dots,m \end{aligned} \tag{۲۵}$$

با استفاده از شیوه تبدیل مسائل مینیماکس به مسائل خطی، مسئله (۲۵) به مسئله زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} &\max \left(\underline{v}^{1R},\dots,\underline{v}^{pR}\right)\\ &s.t\ \ \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij}^{1R} y_j \geq \underline{v}^{1R} \quad \forall y\in Y\\ &\qquad \vdots\\ &\qquad \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij}^{pR} y_j \geq \underline{v}^{pR} \quad \forall y\in Y\\ &\qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\\ &\qquad x \geq 0 \quad i=1,\dots,m \end{aligned} \tag{۲۶}$$

مسئله (۲۶) یک مسئله برنامه‌ریزی ریاضی چندهدفی است که در آن هر عنصر $y\in Y$ متناظر با دقیقاً p محدودیت می‌باشد. بنابراین مسئله شامل تعداد نامتناهی محدودیت است. مجموعه نقاط راسی Y یعنی $S=\{(1,0,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1)\}$ را در نظر بگیرید.

به وضوح محدودیت‌های متناظر با عناصر $y\in S$ به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^{1R} x_i \geq \underline{v}^{1R} \quad j=1,\dots,n\\ &\vdots\\ &\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^{pR} x_i \geq \underline{v}^{pR} \quad j=1,\dots,n \end{aligned}$$

از طرف دیگر، محدودیت‌های باقی‌مانده یعنی محدودیت‌های متناظر با $Y\backslash S$ زایدند. زیرا $\geq$ تحت ترکیبات محدب حفظ می‌شود و در نتیجه هر یک از محدودیت‌ها می‌توانند به صورت یک ترکیب محدب از محدودیت‌های فوق بازنویسی شوند. بنابراین مسئله (۲۶) با مسئله زیر معادل است که تعداد متناهی محدودیت دارد:

$$\begin{aligned} &\max \left(\underline{v}^{1R},\dots,\underline{v}^{pR}\right)\\ &s.t.\ \ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}^{1R} x_i \geq \underline{v}^{1R} \quad j=1,\dots,n\\ &\qquad \vdots\\ &\qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}^{1R} x_i \geq \underline{v}^{pR} \quad j=1,\dots,n\\ &\qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\\ &\qquad x_i \geq 0 \quad i=1,\dots,m \end{aligned} \tag{۲۷}$$

برای حل مسئله (۲۷)، روش‌های مختلفی در بهینه‌سازی چند هدفی پیشنهاد شده است [۲۱]. در اینجا از روش مجموع وزنی به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} &\max \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \underline{v}^{kR}\\ &s.t.\ \ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}^{1R} x_i \geq \underline{v}^{1R} \quad j=1,\dots,n\\ &\qquad \vdots\\ &\qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}^{1R} x_i \geq \underline{v}^{pR} \quad j=1,\dots,n\\ &\qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\\ &\qquad x_i \geq 0 \quad i=1,\dots,m \end{aligned} \tag{۲۸}$$

که در آن $\lambda\in\Lambda=\left\{\lambda\in R^p \mid \lambda\geq 0, \sum_{k=1}^{p}\lambda_k = 1\right\}$.

مؤلفه λ_k از بردار $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\Lambda$ را می‌توان به عنوان اهمیت نسبی تابع هدف kام برای بازیکن ۱ تعبیر کرد. با حل این مسئله، راهبردهای بهینه پارتو $x^{*R}=(\mathrm{x}_1^{*R},\dots,\mathrm{x}_m^{*R})$ و ارزش خوش‌بینانه بازی $\underline{v}^{*R}$ بازیکن ۱ به‌دست می‌آیند.

اگر بازیکن ۱ مسئله را به صورت بدبینانه نگاه کند به این معنی است که فرض می‌کند که بازیکن ۲ راهبرد خود را طوری انتخاب می‌کند که حداقل عایدی او را از اهداف کمینه کند. بنابراین، بازیکن ۱ تصمیم می‌گیرد تا راهبرد خود را طوری انتخاب کند تا این مقادیر را بیشینه کند. بنابراین با در پیش گرفتن روندی مشابه حالت خوش‌بینانه، ارزش بدبینانه بازی، $\underline{v}^{*L}$ و راهبردهای بهینه پارتوی متناظر آن $x^{*L}=\left(x_1^{*L},...,x_m^{*L}\right)$، از حل مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر به‌دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \max\ & \sum_{k=1}^{p}\lambda_k \underline{v}^{kL} \\ s.t.\ & \sum_{i=1}^{m} a_{ij}^{1L}x_i \ge \underline{v}^{1L} \quad j=1,...,n \\ & \vdots \\ & \sum_{i=1}^{m} a_{ij}^{1L}x_i \ge \underline{v}^{pL} \quad j=1,...,n \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ & x_i \ge 0 \qquad i=1,...,m \end{aligned} \tag{۲۹}$$

به طور مشابه می‌توان ارزش بدبینانه و خوش‌بینانه بازیکن ۲ و راهبردهای بهینه پارتوی متناظر را به ترتیب از حل مسائل زیر به‌دست آورد:

$$\begin{aligned} \min\ & \sum_{k=1}^{p}\lambda_k \bar{v}^{kR} \\ s.t.\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{1R}y_j \le \bar{v}^{1R} \quad i=1,...,\mathrm{m} \\ & \vdots \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{1R}y_j \le \bar{v}^{pR} \quad i=1,...,\mathrm{m} \\ & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ & y_j \ge 0 \qquad j=1,...,\mathrm{n} \end{aligned} \tag{۳۰}$$

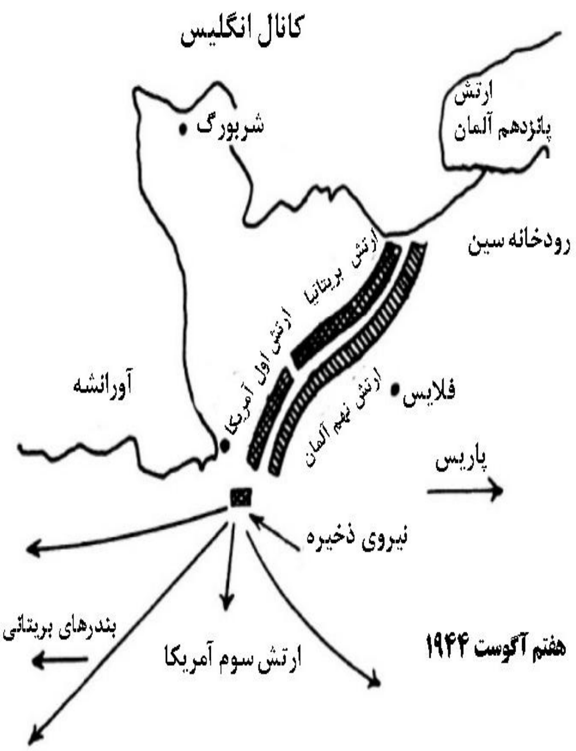
و

$$\begin{aligned} \min\ & \sum_{k=1}^{p}\lambda_k \bar{v}^{kL} \\ s.t.\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{1L}y_j \le \bar{v}^{1L} \quad i=1,...,\mathrm{m} \\ & \vdots \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{1L}y_j \le \bar{v}^{pL} \quad i=1,...,\mathrm{m} \\ & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ & y_j \ge 0 \qquad j=1,...,\mathrm{n} \end{aligned} \tag{۳۱}$$

تبصره۳: با توجه به این واقعیت که بازیکنان ۱ و۲ اشخاص محتاطی هستند و رفتاری منطقی دارند توصیه می‌شود تا بدترین حالت از بازی را لحاظ کنند. بدین سبب توصیه می‌شود که راهبردهای به‌دست آمده از مسائل (۲۹) و (۳۰) را به‌کار گیرند.

۴. کاربرد نظامی: موقعیت شکاف آورانشه[1]

در این بخش یک مثال عددی در زمینه نظامی ارائه شده و برای حل آن روش پیشنهاد شده در بخش ۲ مورد استفاده قرار می‌گیرد. موقعیتی که در جنگ جهانی دوم در آگوست ۱۹۴۴ پیش آمده است، در شکل (۱) نمایش داده شده است.



شکل ۱. موقعیت شکاف آورانشه

ژنرال برادلی[2] (فرمانده نیروهای آمریکایی، بازیکن ۱) تخمین پنج گامی خود را در گزارش جنگش به صورت زیر بیان می‌کند:

مرحله ۱. مأموریت: برادلی مأموریت دارد تا نیروهای دشمن را در میدان از بین ببرد.

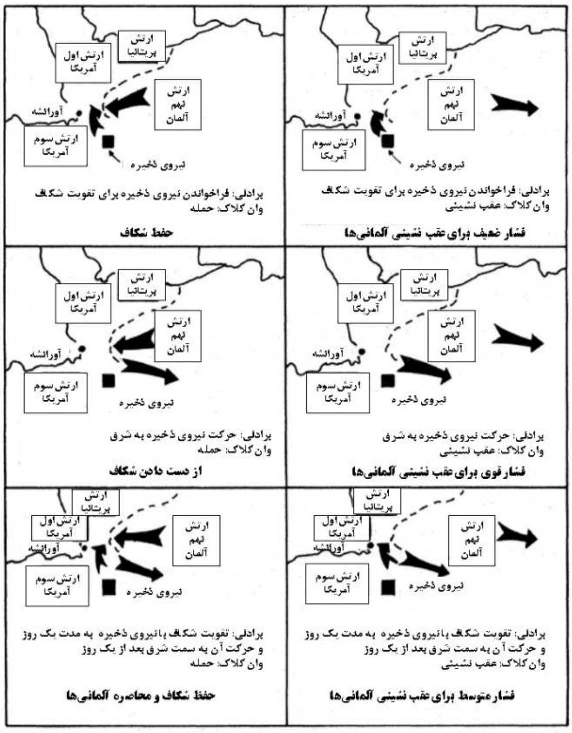
مرحله ۲. موقعیت و اقدامات: فرمانده آلمان ژنرال وان کلاگ[3] (بازیکن ۲) دو اقدام منطقی دارد: حمله به غرب برای نفوذ به دریا و امن ساختن جناح غربی و برش نیروهای واقع در جنوب شکاف؛

[1] Avranches-Gap situation
[2] General Bradley
[3] General von Kluge

یا عقب نشینی به شرق و قرار گرفتن در موقعیت دفاعی قوی در نزدیک رودخانه سین.

ژنرال برادلی سه اقدام در نظر داشت: ۱) فراخواندن نیروهای ذخیره برای دفاع از شکاف و کمک به ارتش، ۲) فرستادن نیروهای ذخیره برای محاصره نیروهای آلمانی، ۳) ترک موقعیت به مدت یک روز و آمدن به کمک ارتش و بعد از یک روز حرکت به شرق برای محاصره نیروهای آلمان.

مرحله ۳. تحلیل اقدامات دو طرف: با دو اقدام وان کلاگ و سه اقدام برادلی شش نبرد اتفاق خواهد افتاد که در شکل (۲) نمایش داده شده است. برادلی سطر و وان کلاگ ستون را انتخاب می کنند. دو انتخاب مستقل تعیین خواهد کرد که نیروها در میدان نبرد به چه صورتی ظاهر خواهند شد.



شکل ۲. نبردهای ممکن از انتخاب راهبردها

خروجی احتمالی در شکل (۲) به صورت مختصر بیان شده است. ترتیب ترجیح خروجی‌های ممکن از خوب به بد از نظر آمریکایی‌ها به صورت زیر است:

۱- نگه داشتن شکاف، محاصره آلمانی‌ها
۲- فشار قوی برای عقب نشینی آلمان
۳- فشار متوسط برای عقب نشینی آلمان
۴- فشار ضعیف برای عقب نشینی آلمان
۵- نگه داشتن شکاف
۶- از دست دادن شکاف

مرحله ۴. مقایسه اقدامات: با داشتن یک ترتیب ترجیح، برادلی توانست اقداماتش را مورد مقایسه قرار دهد. تحت دکترین نظامی آمریکا او می‌خواست راهبرد خود را طوری انتخاب کند تا بیشترین موفقیت را با توجه به توانایی‌های دشمن به‌دست آورد.

مرحله ۵. تصمیم: با توجه به ملاحظات فوق برادلی راهبرد سومش را انتخاب کرد.

وان کلاگ با تحلیل موقعیت به این نتیجه رسید که باید عقب‌نشینی کند ولی این اقدام هیچگاه صورت نگرفت. هیتلر[1] که مایل‌ها از موقعیت فاصله داشت دستور داد تا به شکاف حمله کنند.

برادلی بازیکن بیشینه کننده است زیرا خروجی نبردهای ممکن از نقطه نظر او تجزیه و تحلیل شده‌اند. بنابراین وان کلاگ بازیکن کمینه کننده است. وان کلاگ می‌داند که نبرد سختی خواهد داشت بنابراین به دنبال آن است که شکست سختی نبیند. خروجی احتمالی از شش نبرد ممکن در ماتریس زیر نمایش داده شده است:

فشار ضعیف برای عقب نشینی آلمانی‌ها	نگه داشتن شکاف
فشار قوی برای عقب نشینی آلمانی‌ها	برش شکاف
فشار متوسط برای عقب نشینی آلمانی ها	نگه داشتن شکاف و محاصره نیروهای آلمانی

برادلی فکر می‌کند که وان کلاگ راهبرد خود را طوری انتخاب خواهد کرد که شکست کمتری ببیند یعنی به دنبال آن است که میزان موفقیت فرمانده آمریکایی را تا حد ممکن کم کند. بنابراین، برادلی راهبرد خود را طوری انتخاب خواهد کرد که بیشترین عایدی را به‌دست آورد. وان کلاگ نیز به طور مشابه فکر می‌کند. با توجه به این‌که این بازی نقطه زینی ندارد (یعنی $\max_i \min_j a_{ij} \neq \min_j \max_i a_{ij}$)، بنابراین، باید از راهبردهای آمیخته برای حل بازی استفاده کرد. بازیکنان با در نظر گرفتن توزیع احتمال برای راهبردهای محض به دنبال انتخاب راهبرد بهینه خود هستند.

[1] Hitler

پس از اینکه که اولویت‌های فرمانده آمریکایی مشخص شد این موارد باید به صورت کمی در ماتریس بازی وارد شوند. توجه شود که بازی از نوع آمیخته است یعنی فرمانده ممکن است از تلفیقی از راهبردهایش در نبرد استفاده کند. همچنین این ترجیحات بر اساس اطلاعات کاملاً قطعی به‌دست نیامده است و در بیان ترجیحات، قضاوت و داوری انسان‌ها به‌کار گرفته شده است که همراه با نادقیقی و ابهام در تصمیم‌گیری است و این مسئله باعث خواهد شد که در کمی‌سازی ترجیحات از اعداد فازی استفاده شود. برای بیان عباراتی از قبیل «فشار قوی برای عقب نشینی آلمان، فشار متوسط و غیره» از نظریه مجموعه‌های فازی استفاده می‌شود. استفاده از نوع عدد فازی خاص بستگی به نوع و میزان اطلاعات به‌دست آمده از کارشناسان دارد. در این مثال با توجه به اولویت‌ها اعداد فازی تقریباً ۱۰ تا ۰/۵ به ترتیب از خوب به بد به کار گرفته شده است و برای سادگی به صورت اعداد فازی مثلثی نمایش شده‌اند. در حقیقت علاوه بر این‌که ترجیحات فرماندهان آمریکایی لحاظ شده است بیان نادقیقی ترجیحاتشان نیز اعمال شده است و این مطلب باعث بهبود در تصمیم نهایی خواهد شد.

بنابراین، ماتریس عایدی بازی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} (۲,۳,۵) & (۳,۴,۶) \\ (۰,۰.۵,۱) & (۷,۹,۱۰) \\ (۹,۱۰,۱۱) & (۶,۷,۹) \end{bmatrix}$$

حال با استفاده از تقریب نزدیک‌ترین بازه اعداد فازی، ماتریس فوق به ماتریس عایدی زیر تبدیل می‌شود:

$$A=\begin{bmatrix} [۲/۵,۴] & [۳/۵,۵] \\ [۰/۵,۰/۷۵] & [۸,۹/۵] \\ [۹/۵,۱۰/۵] & [۶/۵,۸] \end{bmatrix}.$$

مسئله (۱۲) برای بازیکن ۱ در این مثال به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &\min\ \ x'_۱+x'_۲+x'_۳ \\ &s.t.\ \ ۴x'_۱+۰/۷۵x'_۲+۱۰/۵x'_۳\geq ۱ \\ &\qquad ۵x'_۱+۹/۵x'_۲+۸x'_۳\geq ۱ \\ &\qquad x'_۱,x'_۲,x'_۳\geq ۰ \end{aligned}$$

با استفاده از روش سیمپلکس برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی، جواب بهینه این مسئله به صورت

$$\left(x_۱'^{*R},x_۲'^{*R},x_۳'^{*R}\right)=\left(۰/۰.۰۲۷,۰/۰۹۳\right)$$

به‌دست می‌آید. بنابراین:

$$\left(x_۱^{*R},x_۲^{*R},x_۳^{*R}\right)=\left(۰,۰/۲۲۵,۰/۷۷۵\right) \text{ و } \underline{v}^{*R}=۸/۳۳.$$

همچنین مسئله (۱۴) برای بازیکن ۱ در این مثال به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} &\min\ \ x'_۱+x'_۲+x'_۳ \\ &s.t.\ \ ۲/۵x'_۱+۰/۵x'_۲+۹/۵x'_۳\geq ۱ \\ &\qquad ۳/۵x'_۱+۸x'_۲+۶/۵x'_۳\geq ۱ \\ &\qquad x'_۱,x'_۲,x'_۳\geq ۰ \end{aligned}$$

با استفاده از روش سیمپلکس جواب زیر برای این مسئله به‌دست می‌آید:

$$\left(x_۱'^{*L},x_۲'^{*L},x_۳'^{*L}\right)=\left(۰,۰/۰۴۱,۰/۱۰۳\right)$$

بنابراین:

$$\left(x_۱^{*L},x_۲^{*L},x_۳^{*L}\right)=\left(۰,۰/۲۸,۰/۷۱\right) \text{ و } \underline{v}^{*L}=۶/۹۴.$$

به طور مشابه برای بازیکن ۲، از حل مسائل برنامه‌ریزی خطی (۱۵ و ۱۶) می‌توان به‌دست آورد:

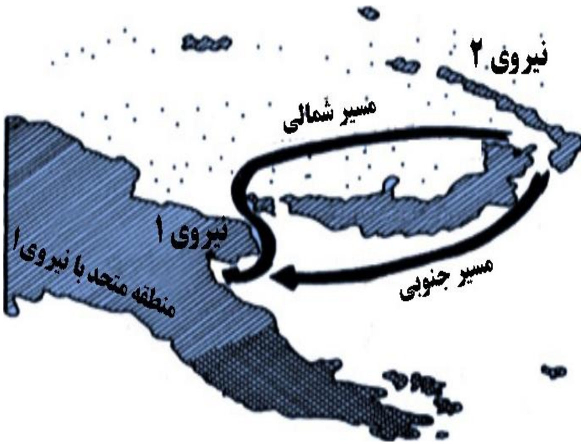
$$\begin{aligned} &\left(y_۱^{*R},y_۲^{*R}\right)=\left(۰/۱۳,۰/۸۷\right),\ \ \overline{\omega}^{*R}=۸/۳۳, \\ &\left(y_۱^{*L},y_۲^{*L}\right)=\left(۰/۱۵,۰/۸۶\right),\ \ \overline{\omega}^{*L}=۶/۹۴ \end{aligned}$$

همان‌گونه که مشاهده می‌شود، بهترین راهبرد برای بازیکن ۱ راهبرد سوم او و برای بازیکن ۲ راهبرد دومش می‌باشد. همچنین مقادیر تابع هدف در حالت‌های خوش‌بینانه یک بازیکن با بدبینانه بازیکن دیگر برابرند.

۵. یک کاربرد نظامی از بازی دوهدفی

در این بخش، کاربردی از بازی‌های چندهدفی با ارائه یک مثال بیان می‌شود. سناریوی بحث شده در این مثال تنها برای نمایش کاربرد این نوع از بازی‌ها و محاسبه راهبردهای بهینه برای بازیکنان است و داده‌های آن واقعی نیستند.

نیروهای دو کشور در حال جنگ را در موقعیتی به صورت نمایش داده شده در شکل (۳) در نظر بگیرید. بازیکنان بازی همان فرماندهان نیروهای ۱ و ۲ هستند.



شکل ۳. موقعیت نبرد

نیروی ۲ برای رسیدن به منطقه مورد نظر باید یکی از دو مسیر شمالی یا جنوبی را انتخاب کند. نیروی ۱ نیز باید یکی از دو مسیر را برای قرار دادن جنگنده‌ها و نیروی زمینی خود انتخاب کند. البته هر یک از فرماندهان می‌توانند در هر دو مسیر نیز حرکت کنند و با این اقدام نیز به دنبال این هستند که در کدام مسیر تمرکز بیشتری داشته باشند.

بنابراین هر یک از فرماندهان دو راهبرد دارند: ۱- مسیر شمالی ۲- مسیر جنوبی. مسیر شمالی مسیری با امنیت کم از لحاظ حرکت و آب و هوا است ولی مسیر جنوبی دارای مسیر حرکت مناسب و آب و هوای مناسب می‌باشد. نیروی ۲ دارای تجهیزات مدرن است و فرمانده این نیرو در پی آن است که با کمترین شکست و آسیب، وارد منطقه شود. این منطقه در دست نیروی ۱ است و فرمانده این نیرو در پی آن است که علاوه بر وارد کردن ضربات سنگین به نیروی ۲ تجهیزات آن‌ها را به صورت سالم به‌دست آورد. به اسارت گرفتن برخی از نفرات نیروی ۲ موفقیت سیاسی بالایی برای کشور ۱ خواهد داشت. ساختار بازی به صورت مجموع صفر و دوهدفی است و فرمانده ۱ به دنبال بیشینه‌سازی موفقیت و فرمانده ۲ در پی کمینه کردن شکست است. یعنی فرمانده ۱ علاوه بر اینکه در تلاش است تا از ورود نیروی ۲ به منطقه ۱ جلوگیری کند در پی به اسارت گرفتن برخی افسران نیروی ۲ و به‌دست آوردن تجهیزات مدرن نیروی ۲ نیز می‌باشد. فرمانده ۲ نیز در تلاش است تا موفقیت فرمانده ۱ را تا حد ممکن کم کند.

فرض کنید که تحلیلگران نظامی پس از بررسی موقعیت و نبردهای احتمالی، خروجی ممکن از هر نبرد را با اعداد تقریبی بیان کرده باشند. فرض کنید ماتریس‌های عایدی این بازی به صورت زیر ارائه شده‌اند:

$$\tilde{A}_۱=\begin{bmatrix}(۱۷۵,۱۸۰,۱۹۰) & (۱۵۰,۱۵۶,۱۵۸)\\ (۸۰,۹۰,۱۰۰) & (۱۷۵,۱۸۰,۱۹۰)\end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_۲=\begin{bmatrix}(۱۲۵,۱۳۰,۱۳۵) & (۱۲۰,۱۳۰,۱۳۵)\\ (۱۲۰,۱۳۰,۱۴۰) & (۱۵۰,۱۶۰,۱۷۰)\end{bmatrix}.$$

با استفاده از مفهوم تقریب نزدیک‌ترین بازه اعداد فازی، ماتریس‌های فوق به صورت ماتریس‌های زیر با عایدی‌های بازه‌ای تبدیل می‌شوند:

$$A_۱=\begin{bmatrix}[۱۷۷/۵,۱۸۵] & [۱۵۳,۱۵۷]\\ [۸۹,۹۵] & [۱۷۷/۵,۱۸۵]\end{bmatrix},$$

$$A_۲=\begin{bmatrix}[۱۲۷/۵,۱۳۲.۵] & [۱۲۵,۱۳۲.۵]\\ [۱۲۵,۱۳۵] & [۱۵۵,۱۶۵]\end{bmatrix}.$$

برای محاسبه راهبردهای بهینه پارتو و ارزش بازی در حالات خوش‌بینانه و بدبینانه بازیکن ۱، دو مسئله زیر حل می‌شود. فرض کنید که اهمیت اهداف بازی برای بازیکن ۱ یکسان باشد. بنابراین ($\lambda_۱=\lambda_۲=۰/۵$) (حالت خوش‌بینانه)

$$\begin{aligned}\max\quad & \lambda_۱\underline{v}_۱^{R}+\lambda_۲\underline{v}_۲^{R}\\ s.t.\quad & ۱۸۵x_۱+۹۵x_۲\geq \underline{v}_۱^{R}\\ & ۱۵۷x_۱+۱۸۵x_۲\geq \underline{v}_۱^{R}\\ & ۱۳۲/۵x_۱+۱۳۵x_۲\geq \underline{v}_۲^{R}\\ & ۱۳۲/۵x_۱+۱۶۵x_۲\geq \underline{v}_۲^{R}\\ & x_۱+x_۲=۱\\ & x_۱,x_۲\geq ۰\end{aligned}$$

(حالت بدبینانه)

$$\begin{aligned}\max\quad & \lambda_۱\underline{v}_۱^{L}+\lambda_۲\underline{v}_۲^{L}\\ s.t.\quad & ۱۷۷/۵x_۱+۸۵x_۲\geq \underline{v}_۱^{L}\\ & ۱۵۳x_۱+۱۷۷/۵x_۲\geq \underline{v}_۱^{L}\\ & ۱۲۷/۵x_۱+۱۲۵x_۲\geq \underline{v}_۲^{L}\\ & ۱۲۵x_۱+۱۵۵x_۲\geq \underline{v}_۲^{L}\\ & x_۱+x_۲=۱\\ & x_۱,x_۲\geq ۰\end{aligned}$$

از حل مسائل فوق جواب‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$\left(x_1^{*L}, x_2^{*L}\right) = \left(۰/۷۹,۰/۲۱\right), \left(v_1^{*L}, v_2^{*L}\right) = \left(۱۵۸/۱۳,۱۲۶/۹۸\right)$$

$$\left(x_1^{*R}, x_2^{*R}\right) = \left(۰/۷۶,۰/۲۴\right), \left(v_1^{*R}, v_2^{*R}\right) = \left(۱۶۳/۶۴,۱۳۳/۰۹\right)$$

به طور مشابه، برای بازیکن ۲ جواب‌های خوش‌بینانه و بدبینانه به صورت زیر به‌دست می‌آیند (در اینجا نیز فرض می‌شود $\lambda_1 = \lambda_2 = ۰/۵$):

$$\left(y_1^{*L}, y_2^{*L}\right) = \left(۰/۹۲,۰/۰۸\right), \left(\bar{v}_1^{*L}, \bar{v}_2^{*L}\right) = \left(۱۷۵/۶۱,۱۲۷/۳۱\right)$$

$$\left(y_1^{*R}, y_2^{*R}\right) = \left(۱,۰\right), \left(\bar{v}_1^{*R}, \bar{v}_2^{*R}\right) = \left(۱۸۵,۱۳۵\right)$$

طبق نتایج به‌دست آمده هر دو فرمانده با تمرکز بر استراتژی اولشان شانس موفقیت بالاتری دارند.

برای حل مسائل فوق از نرم‌افزار لینگو[1] استفاده شده است.

تبصره۴: روش‌های ارائه شده در بخش ۲ و ۳ برای تمام انواع اعداد فازی معتبر است. با توجه به سادگی محاسبات در این مثال‌ها ترجیحات فرماندهان از خروجی بازی به صورت اعداد فازی مثلثی برای بازیکنان نمایش داده شد. این اعداد با توجه به خروجی احتمالی از نبرد و اولویت‌بندی آن‌ها توسط آمریکایی‌ها (در مثال بخش ۴) در نظر گرفته شد و ممکن است به صورت‌های دیگری نیز نمایش داده شوند. در دنیای واقعی برای بیان مناسب این عایدی‌ها باید با افراد خبره نظامی و درگیر موقعیت مورد نظر مشورت شود. هر چند در این مقاله سعی شده است تا از اعداد فازی مثلثی مناسب استفاده شود، بیان این مدل‌ها برای اعداد فازی دیگر نیز به صورت مشابه خواهد بود چرا که اعداد فازی با استفاده از تقریب نزدیک‌ترین بازه به صورت بازه‌ای نوشته می‌شوند.

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش برای یافتن راهبردهای بهینه و ارزش بازی در مسائل بازی با یک و چند هدف به همراه عایدی‌های فازی ارائه شد. با استفاده از تقریب نزدیک‌ترین بازه، مسئله بازی تک‌هدفی با عایدی‌های فازی به یک بازی با عایدی‌های بازه‌ای تبدیل شد و با حل دو مسئله برنامه‌ریزی خطی جواب‌های خوش‌بینانه و بدبینانه بازیکنان به‌دست آمد. دو مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفی نیز برای محاسبه ارزش‌های خوش‌بینانه و بدبینانه و راهبردهای بهینه پارتوی متناظر آن‌ها در بازی‌های چندهدفی با عایدی‌های فازی پیشنهاد شد. سادگی حل مسئله از امتیازات روش پیشنهادی می‌باشد. نحوه تصمیم‌گیری در یک نبرد اتفاق افتاده در جنگ جهانی دوم به صورت یک بازی مجموع صفر با عایدی‌های فازی مورد بررسی قرار گرفت و ملاحظه گردید راهبردهای بهینه به‌دست آمده از این روش با تحلیل دکترین نظامی آمریکا مطابقت دارد. کاربردهای گسترده بازی‌های چندهدفی در مسائل نظامی در دنیای امروز اهمیت این تحقیق را نشان می‌دهد. به ویژه، تحقیق در این زمینه‌ها در ساخت سامانه شبیه‌سازی و نرم‌افزاری بازی جنگ پیشرفته و مدرن می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

۷. مراجع

[1] Neumann.J , V.; Morgenstern, O. “Theory of Games and Economic Behavior”; Wiley, New York, 1944.

[2] Haywood, O. G. “Military Decision and Game Theory”; J. Oper. Res. Soc. Am. 1989, 2, 365-385.

[3] Fudenberg, D.; Tirole, J. “Game Theory”; The MIT Press, 1991.

[4] Owen, G. “Game Theory”; Academic Press, San Diego, Third Ed. 1995.

[5] Aplac, H.; Kabak, M.; Kose, E. “A Two Person Zero Sum Game Oriented to Integration of Objectives”; J. Military Studies 2014, 5, 65-85.

[6] Türksen, I. B. “An Ontological and Epistemological Perspective of Fuzzy Set Theory”; Elsevier, 2006.

[7] Cheng, C. H.; Lin, Y. “Evaluating the Best Main Battle Tank Using Fuzzy Decision Theory With Linguistic Criteria Evaluation” Eur. J. Oper. Res. 2002, 142, 174–186.

[8] Sakawa, M.; Nishizaki, I. “Cooperative and Noncooperative Multi-Level Programming”; Springer, 2009.

[9] Pamucar, D.; Bozanic, D.; Dorovic, B. “Fuzzy Logic in Decision Making Process in the Armed Forces of Serbia, Fuzzy Sets, Fuzzy Logic in Military Decision Making Process, Modeling of Fuzzy Logic System to Support Decision Making”; Lambert Academic Publishing, 2011.

[10] Campos, L. “Fuzzy Linear Programming Models to Solve Fuzzy Matrix Games”; Fuzzy Sets Syst. 1989, 32, 275-289.

[11] Bector, C. R.; Chandra ,S. “Fuzzy Mathematical Programming and Fuzzy Matrix Games”; Springer Verlag, Berlin, 2005.

[12] Li, D. F. “Lexicographic Method For Matrix Games with Payoffs of Triangular Fuzzy Numbers”; Int. J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Syst. 2008, 16, 371–389.

[13] Clemente, M.; Fernandez, F. R.; Puerto, J. “Pareto-Optimal Security Strategies in Matrix Games with Fuzzy Payoffs”; Fuzzy Sets Syst. 2011, 176, 36–45.

[14] Collins, W. D.; Hu, C. Y. “Studying Interval Valued Matrix Games with Fuzzy Logic”; Soft Comput. 2008, 12, 147–155.

[15] Li, D. F. “A Fast Approach to Compute Fuzzy Values of Matrix Games with Payoffs of Triangular Fuzzy Numbers”; Eur. J. Oper. Res. 2012, 223, 421-429.

[16] Chandra, S.; Aggarwal ,A. “On Solving Matrix Games With Payoffs of Triangular Fuzzy Numbers: Certain Observations and Generalizations”; Eur. J. Oper. Res. 2015, 246, 575-581.

[17] Li, D. F.; Nan, J. X. “An Interval-Valued Programming Approach to Matrix Games with Payoffs of Triangular Intuitionistic Fuzzy Numbers”; Iranian J. of Fuzzy Syst. 2014, 11, 2, 45-57.

[1] Lingo

[18] Dutta, B.; Gupta, S. K. “On Nash Equilibrium Strategy of Two Person Zero Sum Games with Trapezoidal Fuzzy Payoffs”; Fuzzy Information and Eng. 2014, 6, 299-314.

[19] Maeda, T. “On Characterization of Equilibrium Strategy of Two-Person Zero Sum Games With Fuzzy Payoffs”; Fuzzy Sets Syst. 2003, 139, 283–296.

[20] Cunlin, L.; Qiang, Z. “Nash Equilibrium Strategy For Fuzzy Noncooperative Games”; Fuzzy Sets Syst. 2011, 176, 46-55.

[21] Seikh, M. R.; Nayak, P. K.; Pal, M. “An Alternative Approach for Solving Fuzzy Matrix Games”; Int. J. Math. Soft Comput. 2015, 5, 79-92.

[22] Nishizaki, I.; Sakawa, M. “Fuzzy and Multiobjective Games for Confict Resolution”; Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2001.

[23] Bigdeli, H.; Hassanpour, H. “A Satisfactory Strategy of Multi-Objective Two Person Matrix Games with Fuzzy Payoffs”; Iranian J. Fuzzy Syst. 2016, 13, 17-33.

[24] Sakawa, M. “Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization”; Plenum Press, New York and London, 1993.

[25] Grzegorewski, P. “Nearest Interval Approximation of a Fuzzy Number”; Fuzzy Sets Syst. 2002, 130, 321-330.

[26] Bazaraa, M. S.; Jarvis, J. J. “Linear Programming and Network Flows”; John Wiley & Sons, Inc., New York, 1977.