

شناسایی سازه‌های مدفون زیرزمینی با استفاده از شبیه‌سازی داده‌های ثقل سنجی

حبیب ا. سهامی^۱، محمد یاسر رادان^۲، داود مجیدی^۳

۱- استادیار، ۳- کارشناس ارشد، دانشکده آمایش و پدافند غیرعامل، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، ۲- دانشجوی دکتری ژئوفیزیک، پژوهشکده بین‌المللی

زلزله شناسی و مهندسی زلزله

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۰/۰۶/۲۰، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۱/۰۴/۰۱)

چکیده

روش‌های ژئوفیزیکی همواره روش‌های توانمندی در تعیین مکان و شناسایی اولیه مناطق مورد بررسی می‌باشند. روش ثقل سنجی (گرانی سنجی) با استفاده از تباین چگالی موجود در مناطق مختلف در شناسایی سازه‌ها و حفره‌های زیرزمینی کاربرد فراوانی دارد. در این مقاله ابتدا به معرفی روش گرانی سنجی و گرادیان سنجی هوابرد، تصحیحات مورد نیاز و دستگاه‌های امروزی با کاربردهای اکتشافی-نظامی پرداخته می‌شود. سپس جهت بررسی صحت و دقت این روش، با استفاده از برنامه تهیه شده، اثر بی‌هنجاری گرانی و گرادیان گرانی حاصل از سازه‌ی زیرزمینی با استفاده از مدل‌سازی به روش پیشرو شبیه‌سازی می‌شود و دامنه‌ی بی‌هنجاری حاصل از آن در یک شبکه‌ی برداشت و برای ارتفاع‌های مختلف نشان داده می‌شود. جهت نزدیکی داده‌های شبیه‌سازی شده به داده‌های واقعی نوفه‌ی اتفاقی اضافه می‌گردد. در نهایت نتایج حاصل از شبیه‌سازی و دقت دستگاه‌های مختلف معرفی شده، جهت تعیین گستره‌ی ارتفاع پروازهای قابل دسترس، مقایسه می‌شوند. در خاتمه راهکارهای موثر جهت کاهش احتمال شناسایی سازه‌های مدفون و بهبود فرآیند استتار در مقابل شناسایی‌های هواپایه ارائه می‌گردد.

کلید واژه‌ها: بی‌هنجاری گرانی، گرانی سنجی هوابرد، گرادیان گرانی، سازه‌های زیرزمینی.

Detecting Buried Underground Structures Using Simulation of Gravity Data

H. Sahami*, M. Y. Radan, D. Majidi,

Faculty of Spatial Planning & Passive Defence, Malek Ashtar University of Technology

(Received: 09/11/2011, Accepted: 04/21/2012)

Abstract

Geophysical methods are used as locating tools and reconnaissance methods. Gravity method is used to locate underground structures and cavities using density contrast. In this paper, methods of airborne gravimetry and airborne gravity, gradiometry, corrections and their modern instruments have been presented. In order to evaluate the accuracy and efficiency of these methods, a developed program have been used. Artificial data of an underground structure have been provided by forward modeling for earth surface at different altitudes and then noise were added to data. Finally the results of the simulation and the accuracy of the presented instruments for different altitudes have been compared. In conclusion effective solutions to mitigate the probable detection of buried structures and the improvement of camouflage processes against airborne reconnaissance are provided.

Keywords: Gravity Anomaly, Airborne Gravimetry, Gravity Gradient, Underground Structures.

* Corresponding Author E-mail : Hsahami15@gmail.com

۱. مقدمه

شناسایی تأسیسات زیرزمینی مدفون به عنوان یکی از پیچیده ترین چالش‌ها در برابر عملیات شناسایی توسط هواپیماهای شناسایی، پرنده‌های بدون سرنشین و حتی سنجنده‌های فضاپایه بشمار می‌آیند. سازه‌های زیرزمینی خواه از نوع تونل‌هایی که در دل کوه حفاری می‌شوند و خواه انبارهای بزرگ زیرزمینی یا زاغه‌های مهمات که چندین متر زیر زمین حفر شده‌اند، تاکنون به عنوان اهداف غیرقابل دسترس مطرح بوده‌اند. در اکثر موارد فقط یک درب ورودی و یا یک هواکش تهویه، وجود چنین تأسیسات زیرزمینی را که می‌تواند فضاهای مدفون و عمیق با وسعتی بیش از هزاران متر مربع را در برگیرند، تأیید می‌نمایند. بدیهی است چنین اثرات سطحی از فضاهای زیرزمینی به راحتی در مقابل سنجنده‌های مرئی، مادون قرمز و دیگر سنجنده‌های فضا پایه قابل استتارند و شناسایی آنها توسط تجهیزات جاسوسی و ماهواره‌های شناسایی موجود به یک چالش بزرگ تبدیل گردیده است. از اواسط قرن بیستم تاکنون استفاده از سازه‌های مدفون در زیرزمین به عنوان یکی از ابزار تعیین کننده در مباحث دفاعی مورد توجه قرار گرفته است. این سازه‌ها امنیت مورد نیاز جهت مخفی نگه داشتن ابزار و تجهیزات مورد نیاز نظامی و کشوری را فراهم می‌آورند. در سال‌های گذشته نمونه‌های بسیاری از سازه‌های زیرزمینی در جنگ‌ها مورد استفاده قرار گرفته است که به طور مثال می‌توان به تأسیسات صنعتی زیرزمینی که در طول جنگ جهانی دوم توسط آلمان‌ها مورد استفاده قرار می‌گرفت و تونل‌های مورد استفاده توسط ارتش ویتنام جهت انتقال و اختفاء ادوات نظامی در طول جنگ ویتنام اشاره کرد. سازه‌های مدفون چالش نظامی جدی را به دلیل وجود مشکلاتی در تعیین مکان آنها و تشخیص فعالیت‌های انجام شده در درون آنها به وجود آورده‌اند [۱].

سازه‌های زیرزمینی را به دو صورت کلی می‌توان تقسیم بندی کرد. دسته اول، سازه‌های نوع سطحی^۱ هستند که شامل حفر زمین به صورت گودال و قرار دادن سازه در درون آن می‌باشند. در نهایت قسمت بالایی با سنگ و خاکریزها پوشیده می‌شود. این نوع سازه‌ها در نزدیکی سطح زمین و در عمقی در حدود ۱۰۰ فوت قرار دارند. با توجه به عمق کم آنها به طور معمول بمب‌های معمولی قادر به تخریب آنها می‌باشند. دسته دوم، شامل حفاری به صورت تونل زدن^۲ می‌باشد می‌باشد که در اعماق زیاد و یا در زیر کوه‌ها قرار دارند و دارای عمقی در حدود چند صد فوت می‌باشند. این سازه‌ها در زیرزمین قرار دارند و توسط سنگ‌های مختلف احاطه شده‌اند.

تاکنون هیچگونه راه حل تعیین کننده و اثر بخشی در جهت شناسایی و رصد اینگونه تأسیسات مدفون زیرزمینی ارائه نشده است. تنها ابزار مفید در این حوزه به کارگیری ترکیبی از منابع مختلف

است، که از جمله می‌توان به الف: شناسایی تصویری، نظیر تصاویر حاصل از برداشت‌های هواپایه، ب: سنجش یا شناسایی نشانه‌هایی نظیر رصد حرارتی، صوتی یا لرزشی، خروج مواد شیمیایی، ج: شناسایی سیگنال، نظیر سیگنال‌های رادیویی یا راداری و در نهایت شناسایی از طریق عوامل انسانی، نظیر استفاده از جاسوس‌ها، اشاره نمود [۲].

شناسایی تأسیسات زیرزمینی زمانی آسان‌تر و سریع‌تر است که موقعیت تقریبی سازه مورد نظر معلوم باشد. بدیهی است داشتن موقعیت تقریبی اهداف زیرزمینی مستلزم برخورداری از ابزار شناسایی است که می‌تواند حوزه‌های گسترده‌ای را شامل شود تا بتواند موقعیت نسبی و حتی ابعاد سازه مدفون را تعیین کند. به عبارت دیگر این قابلیت باید از طریق استفاده از یک فناوری محقق گردد که امکان استتار هدف وجود نداشته باشد. بدیهی است این قابلیت می‌تواند متعاقباً به عنوان سرنخ برای دیگر منابع اطلاعاتی و جاسوسی به عنوان هدف قابل رصد تلقی گردیده تا به مکان و نقطه‌ای خاص متمرکز شود و اطلاعات کامل‌تر و جزئیات بیشتر در مورد هدف مورد نظر با استفاده از ابزار متعارف شناسایی کسب گردد. برای نیل به چنین قابلیت‌هایی لازم است گستره اقدامات را از محدوده عملیات جاسوسی و شناسایی متعارف فراتر دید و به دنبال روش‌هایی بود که دانشمندان و دیگر کارشناسان برای درک و گسترش اطلاعات خویش در مورد لایه‌های زیرین و درون زمینی از این روش‌ها استفاده می‌کنند. ژئوفیزیکدانان و زمین‌شناسان از حدود یک صد سال پیش تاکنون از امکان سنجش میدان ثقل یا گرانی سنجی جهت تحلیل و مطالعه نهشته‌های معدنی و ساختارهای زمین شناسی زیر سطحی استفاده می‌کردند.

تقاضای مداوم و فزاینده انواع فلزات و افزایش زیاد در مصرف نفت و گاز طبیعی در طول پنجاه سال گذشته سبب توسعه بسیاری از تکنیک‌های ژئوفیزیکی با دقت بالا جهت آشکار سازی و نقشه برداری نوشته‌ها و ساختارهای غیر قابل رؤیت شد. به علت توسعه وسایل الکترونیکی در تجهیزات صحرایی و کاربرد وسیع حسابرهای رقومی در تحلیل داده‌های ژئوفیزیکی، پیشرفت تکنیک‌ها به ویژه در دهه‌ی گذشته بسیار سریع بوده است. چون اکثر نهشته‌های کانی در زیر سطح زمین قرار دارند، آشکار سازی آنها به عواملی بستگی دارد که آنها را از محیط اطراف متمایز می‌سازد. امروزه از بسیاری از روش‌های ژئوفیزیکی در عملیات‌های تعیین مکان و شناسایی با کاربرد نظامی و غیرنظامی استفاده می‌شود. تغییرات در رسانندگی الکتریکی و جریان‌های طبیعی زمین، آهنگ و پاشی اختلاف پتانسیل‌های مصنوعی وارده به زمین، تغییرات محل گرانی، مغناطیس و رادیواکتیویته همگی اطلاعاتی را در مورد طبیعت ساختارهای زیرزمینی برای ژئوفیزیکدان فراهم می‌آورد که او را در تعیین محل‌های مناسب برای جستجوی نهشته‌های کانی، اهداف اکتشافی و

¹ Cut and Cover

² Tunneling

کوش لرزه‌ای را به‌وجود آورد [۵]. در جنگ‌های جهانی، کشتی‌ها، زیردریایی‌ها و مین‌ها را نیز با استفاده از خواص مغناطیسی آنها آشکار سازی می‌کردند.

روش گرانی‌سنجی با استفاده از تغییرات مشاهده شده در شتاب گرانی، مناطقی با تباین چگالی را شناسایی می‌کند. نیروی گرانش با قانون نیوتن بیان می‌شود که مبنای کارهای گرانی‌سنجی است. طبق این قانون نیروی موجود بین دو ذره به جرم‌های m_1 و m_2 با حاصل ضرب جرم‌های آنها نسبت مستقیم و با مربع فاصله میان گرانیگاه‌های دو ذره نسبت معکوس دارد. می‌توان مشاهده کرد که شتاب m_2 ناشی از حضور m_1 از تقسیم نیروی F بر m_2 به‌دست می‌آید. در حالت خاص، اگر m_1 را برابر M_e یعنی جرم زمین بگیریم، شتاب جرم m_2 در سطح زمین برابر است با:

$$g = \frac{F}{m_2} = -\gamma \frac{M_e}{R^2} r_1 \quad (1)$$

که در آن R_e شعاع زمین و r_1 در راستای شعاع و از مرکز زمین به طرف خارج است. این شتاب، که شتاب گرانی نامیده می‌شود، اولین بار توسط گالیله اندازه‌گیری شد. مقدار عددی آن در سطح زمین تقریباً برابر 980 cm/sec^2 است. واحد شتاب گرانی، 1 cm/sec^2 به افتخار گالیله، گال (Gal) نامیده می‌شود.

میدان‌های گرانشی، پایسته‌اند، بدین معنی که کار انجام شده در حرکت دادن یک جرم در میدان گرانشی مستقل از راه پیموده شده است و فقط به نقاط انتهایی مسیر بستگی دارد. نیروی گرانشی برداری است در راستای خط واصل بین مرکزهای دو جرم. نیرویی که یک میدان پایسته را به‌وجود می‌آورد مشتقی از یک تابع پتانسیل نرده‌ای (اسکالر)، U ، است.

$$\nabla U(r) = F(r) / m_2 = g(r) \quad (2)$$

از طرف دیگر، می‌توان این معادله را برای پتانسیل گرانی به صورت رابطه (۳) حل نمود.

$$U(r) = \int_{\infty}^R g \cdot dr = -\gamma M \int_{\infty}^R \frac{dr}{r^2} = \frac{\gamma M}{R} \quad (3)$$

حل مسائل گرانی از طریق حساب پتانسیل نرده‌ای U اغلب ساده‌تر از حساب از طریق بردار g است.

اندازه‌گیری مطلق گرانی با دستگاه‌های ثابت انجام می‌شود و مستلزم اندازه‌گیری دقیق دوره پاندول یا سقوط وزنه است. با استفاده از آونگ مقدار g با تعیین زمان تعداد زیادی نوسان و سپس با استفاده از رابطه ساده $g = 4\pi^2 I / T^2 mh$ قابل محاسبه است. که در آن I گشتاور ماند T دوره m جرم و h فاصله نقطه آویز از مرکز جرم آونگ می‌باشند. با استفاده از جسم در حال سقوط، شتاب گرانی را می‌توان از معادله حرکت نیوتن، با تعیین فاصله زمانی بین دو نقطه در یک سقوط قائم به‌دست آورد. اندازه‌گیری نسبی گرانی شامل تعیین تغییرات g و مقایسه مقادیر به‌دست آمده از یک ایستگاه به ایستگاه

یا تعیین مکان و شناسایی سازه‌های زیرزمینی یاری می‌کند [۳]. می‌توان کاربردها و پیشرفت‌های ژئوفیزیکی را در تعیین مکان حفره‌ها و تونل‌ها به سه حوزه ذیل تقسیم کرد: (۱) حوزه ژئوتکنیکی غیرنظامی و ایمنی، (۲) حوزه فعالیت‌های جنایی غیرنظامی و (۳) حوزه نظامی، که در این مقاله به حوزه سوم پرداخته می‌شود.

امروزه در ژئوفیزیک و به خصوص فناوری گرانی‌سنجی و دستگاه‌های مرتبط با آن پیشرفت‌های سریعی حاصل شده است که می‌تواند به عنوان یکی از مؤثرترین ابزار جهت شناسایی سازه‌ها، تأسیسات و اهداف مدفون از طریق برداشت‌های هواپایه و فضاپایه بکار روند. تجربیات حاصل از گرانی‌سنجی فضاپایه، هواپایه، شناورهای دریایی و تحقیقات جاری در این زمینه توانسته مبنای فنی و علمی قابل اعتمادی تلقی گردد تا از قابلیت‌های سامانه‌های دورسنجی جهت شناسایی استفاده گردد. داده‌های حاصل از چنین سامانه‌هایی می‌توانند سرنخی برای دیگر انواع سنجنده‌ها برای شناسایی دقیق‌تر و کسب اطلاعات با جزئیات بیشتر گردند [۴].

در این تحقیق سه هدف اصلی دنبال می‌شود اولاً، تعیین جایگاه روش گرانی‌سنجی در تعیین مکان و شناسایی سازه‌های مدفون، ثانیاً، معرفی و بررسی دستگاه‌های مختلف این روش و تعیین پارامترهای مهم آنها و ثالثاً، معرفی راهکارهای جدید جهت کاهش احتمال شناسایی سازه‌های مدفون. نگارندگان این تحقیق نگاه موشکافانه‌ای نسبت به توسعه و کاربرد گرانی‌سنجی برای شناسایی اهداف مدفون معطوف داشته و سعی نموده‌اند ظرفیت و قابلیت فزاینده این گونه ابزار و تجهیزات برای شناسایی و جستجوی اهداف مدفون زیرزمینی را تحلیل نموده و به یافته‌های علمی مناسب به‌ویژه در مورد نقش روش گرانی‌سنجی رسیده و راه کارهای جدید جهت کاهش احتمال شناسایی سازه‌های مدفون و بهبود فرآیند استتار در مقابل شناسایی‌های هواپایه معرفی نمایند.

۲. روش‌های ژئوفیزیک ابزاری موثر در آشکارسازی عوارض مدفون

تقاضای فزاینده انواع فلزات و افزایش زیاد در مصرف نفت و گاز طبیعی در طول پنجاه سال گذشته باعث توسعه بسیاری از تکنیک‌های ژئوفیزیکی با دقت‌های بالا جهت آشکارسازی و نقشه‌برداری نهشته‌ها، ساختارهای غیرقابل رؤیت و سازه‌های زیرزمینی شده است. وسیله‌های چندی که امروزه توسط ژئوفیزیکدانان به کار می‌رود از روش‌های به‌کار رفته در مورد تعیین محل توپ‌ها، زیردریایی‌ها و هواپیماها در اثنای دو جنگ جهانی به-وجود آمده است. در فرانسه در حین جنگ جهانی دوم محل توپ‌ها را، با اندازه‌گیری زمان ورود امواج کشسان حاصله از پس زدن توپ در داخل زمین، تعیین می‌کردند. این عمل مستقیماً روش شکستی

چرخش زمین و برآمدگی خفیف استوایی آن هر دو باعث افزایش گرانی با عرض جغرافیایی می شوند. بنابراین تصحیح عرض جغرافیایی در مورد شبکه های شمالی - جنوبی مورد لزوم است. این تصحیح از دیفرانسیل گیری رابطه (۴) حاصل می شود:

$$\frac{dg_L}{ds} = \frac{1}{R_e} \frac{dg_L}{d\phi} \approx \frac{1}{R_{eq}} \frac{dg_L}{d\phi} \approx 1.307 \sin 2\phi \text{ mgal/mile} \quad (5)$$

در رابطه (۵) ds برابر فاصله افقی شمالی جنوبی، R_e شعاع زمین در عرض جغرافیایی ϕ و R_{eq} شعاع استوایی زمین است.

با توجه به اینکه گرانی با عکس مربع فاصله تغییر می کند، بنابراین لازم است که مقدار آن به علت تغییرات ارتفاع بین ایستگاه ها تصحیح شود، به طوری که تمام قرائت ها به یک سطح مبنا برگردانده شوند. این تصحیح به نام تصحیح هوای آزاد معروف است. این تصحیح با دیفرانسیل گیری از رابطه نرده ای نظیر رابطه (۱) به دست می آید:

$$\frac{dg_{FA}}{dR_e} = -\frac{2\gamma M_e}{R_e^3} \approx -\frac{2g}{R_{eq}} \approx -0.3085 \text{ mgal/m} \quad (6)$$

تصحیح بوگه، برای در نظر گرفتن ربایش مواد بین ایستگاه و سطح مبنا، که در حساب تصحیح هوای آزاد از آن چشم پوشی شد، اعمال می شود. اگر چگالی میانگین برای سنگ های پوسته برابر 2.67 گرم بر سانتیمتر مکعب در نظر گرفته شود، مقدار عددی این رابطه برابر خواهد بود با:

$$dg_B/dR_{eq} = 0.0341 \text{ mgal/ft} = 0.112 \text{ mgal/m} \quad (7)$$

یکی از مهم ترین تصحیحات گرانی سنجی هوابرد و همچنین گرادبان سنجی گرانی، تصحیح توپوگرافی می باشد. این تصحیح شامل ساختن مدلی از ساختار توپوگرافی منطقه^۱ و حذف اثر گرادبان گرانی مدل ساخته شده از داده های برداشت شده می باشد که خود نیازمند اطلاعات قبلی از شکل منطقه ی مورد بررسی و چگالی سنگ های آن منطقه است [۶]. در تصحیح توپوگرافی دقت داده های موقعیت یابی از اهمیت ویژه ای برخوردار است.

اثر اتووش به دلیل حرکت دستگاه اندازه گیری در مسیری منحنی (به دور زمین) و شتاب مرکز گرا به وجود می آید. تصحیح این اثر توسط هارلان^۲ به صورت رابطه (۸) معرفی شده است:

$$E = \frac{v^2}{a} \left(1 - \frac{h}{a} - \varepsilon (1 - \cos^2 \phi (3 - 2 \sin^2 \alpha)) \right) + 2v\omega_e \cos \phi \sin \alpha \quad (8)$$

$$\varepsilon = \frac{v^2}{a} \sin^2 \phi + 4v\omega_e \quad (9)$$

در روابط (۸) و (۹)، v مجموع سرعت هواپیما در جهت های شمالی - جنوبی و شرقی - غربی، a نصف محور اصلی زمین، h ارتفاع هواپیما، ω_e سرعت زاویه ای و ϕ و α به ترتیب عرض جغرافیایی و آزیموت هواپیما می باشند. با توجه به این رابطه می توان نتیجه گرفت که خطا در تعیین موقعیت هواپیما سبب اثر بزرگ تری در تصحیح اتووش و

دیگر می باشد. اکثریت اندازه گیری ها و دستگاه های گرانی سنجی امروزی از این نوع هستند.

دستگاه های گرانی سنجی به دو بخش دستگاه های پایدار و دستگاه های ناپایدار تقسیم می شوند. در دستگاه های پایدار از یک سیستم پایدار با تغییرات کوچک جهت اندازه گیری گرانی استفاده می شود که میزان تغییرات در سیستم به روش های مختلفی تقویت شده و ثبت می گردد. در دستگاه های ناپایدار از یک سیستم ناپایدار که تغییرات کوچک سبب تغییرات بزرگ در آن می شود، استفاده شده است، که دستگاه های جدید همگی از نوع ناپایدار می باشند.

۳. گرانی سنجی هوابرد

پیشرفت هایی که در سال های اخیر در روش ها، دستگاه ها و سیستم های موقعیت یابی صورت گرفته است، سبب شده است اندازه گیری های هوابرد بر روی مناطق وسیعی از زمین ها و دریاها انجام شود. به وسیله مطالعات هوابرد می توان به صورت سریع و با هزینه پایین منطقه ی مورد بررسی را ارزیابی کرد. اندازه گیری های هوابرد به طور معمول بر روی خط پروازهایی با طول بلند که فاصله بین این خطوط پرواز با توجه به اندازه ی هدف مورد بررسی و عمق آن تعیین می گردد، صورت می گیرند.

تأثیر بی هنجاری هایی با فرکانس بالا که به طور معمول در اثر ساختارهای سطحی ایجاد می شوند را می توان با افزایش ارتفاع پرواز و انتخاب فواصل اندازه گیری بزرگ تر کاهش داد. کاربرد وسیع گرانی سنجی هوابرد شامل تعیین مکان سازه های زیرزمینی، حوزه های رسوبی و حفره ها می باشد. تصحیحات عرض جغرافیایی، هوای آزاد، بوگه و توپوگرافی، تصحیحاتی هستند که بر روی داده های گرانی سنجی هوابرد و زمینی اعمال می گردند. علاوه بر این ها، تصحیحاتی جهت حذف اثر شتاب هواپیما بر روی داده های گرانی سنجی هوابرد نیز اعمال می شود که شامل شتاب قائم هواپیما و جفت شدگی بین سرعت هواپیما و چرخش زمین می باشد (تصحیح اتووش).

سطح زمین بر حسب مقدار گرانی در تمام نقاط سطحی آن با یک شکل ریاضی تعریف می شود. این شکل ریاضی به کره وار مرجع معروف است. این شکل با میانگین سطح دریاهای آزاد، در صورتی که جرم های اضافی خشکی ها حذف و عمق های اقیانوسی پر شوند، ارتباط دارد. رابطه (۴) مقدار گرانی را در هر نقطه از این کره وار به دست می دهد:

$$g = g_0 (1 + \alpha \sin^2 \phi + \beta \sin^2 2\phi) \quad (4)$$

که در آن $g_0 = 978 / 0318 \text{ gals}$ ، برابر گرانی در استوا، ϕ عرض جغرافیایی، α و β ثابت هایی به ترتیب برابر 0.0053024 و 0.0000058 می باشند.

¹ Digital Terrain Model (DTM)

² Harlan

دقت و تفکیک‌پذیری داده‌های گرانی‌سنجی هوابرد را می‌توان با بال‌ا بردن حساسیت حسگرها و یا بهبود بخشیدن به روش‌های پردازش افزایش داد. پردازش اولیه داده‌های گرانی‌سنجی شامل اعمال فیلتر پایین‌گذر و کنترل کیفیت داده‌ها با کمینه کردن تفاوت داده‌های برداشت شده در نقاط تقاطع بین خطوط برداشت و خطوط کنترلی (گره‌ای) می‌باشد. فیلترهای پایین‌گذر به‌طور معمول با طول‌های زمانی بین ۵۰ تا ۲۰۰ ثانیه جهت حذف نوفه‌های ناخواسته بر روی داده‌های گرانی‌سنجی باقیمانده اعمال می‌شوند. با کوتاه‌تر شدن طول فیلتر مورد استفاده تفکیک‌پذیری^۱ افزایش می‌یابد ولی دقت به صورت نمایی کاهش می‌یابد. تفکیک‌پذیری مؤثر سیستم به صورت نیم‌طول موج تعریف می‌شود که برابر است با نصف حاصل‌ضرب سرعت در طول فیلتر اعمالی [۸]. با تکرار یک خط پرواز و داده‌برداری به صورت مکرر می‌توان نوفه‌های ناخواسته را کاهش داد که به‌طور معمول از روش تفاضل جذر میانگین مربع بین خطوط تکرار شده، استفاده می‌شود.

سیستم گرانی‌سنجی هوابرد دارای بخش‌های اصلی مشخصی می‌باشد. مشکلات اساسی در این روش شامل تعیین موقعیت هواپیما (سرعت، ارتفاع و موقعیت مکانی)، اثر اتووش، شتاب هواپیما در حین حرکت و نحوه کارکرد گرانی‌سنج‌ها در اثر اعمال تکان‌ها در محیط دینامیکی داخل هواپیما، می‌باشند. گرانی باقیمانده با کم کردن شتاب قائم محاسبه شده با داده‌های GPS از داده‌های مؤلفه قائم گرانی اندازه‌گیری شده، محاسبه می‌شود. در حالت عملی تصحیحاتی چون اثر تنظیم سکوی نگه‌دارنده، شتاب‌های افقی، اثر اتووش، اثر رانش و اثر تغییرات دمایی نیاز می‌باشد. یکی از عواملی که همواره بر روی داده‌های گرانی اثر مستقیم دارد، عدم تفاوت بین شتاب گرانی و شتاب ناشی از حرکت هواپیما می‌باشد. برای جدایی شتاب‌های ناخواسته از داده‌های گرانی به یک حسگر غیر مانده^۲ مانند GPS احتیاج است. محدودیت در داده‌های GPS دقت داده‌های گرانی را تحت‌الشعاع قرار می‌دهد که این خود به معنای محدود کردن روش گرانی هوابرد در اکتشاف معدنی و تعیین مکان ساختارهای زیر سطحی می‌باشد [۹]. بر اساس بررسی‌هایی که توسط Torge صورت گرفت، می‌توان نشان داد که میزان طیف نوفه‌ی GPS به صورت رابطه (۱۰) می‌باشد:

$$S_X(f) = S_{02} \left(1 + \left(\frac{f_c}{f}\right)^n\right) \quad (10)$$

که S_{02} برابر با ۰/۰۱ متر، f_c برابر با ۰/۰۱۵ هرتز و توان n برابر با ۳ می‌باشد. این تابع گویای این مطلب است که طیف نوفه‌ی GPS از مقدار پایه‌ای در حدود ۰/۰۱ شروع و با توجه به توان n افزایش می‌یابد. فیلتر پایین‌گذر با فرکانس قطعی برابر با f_f بر روی

در نهایت کاهش دقت داده‌ها می‌شود [۶].

در گرانی‌سنجی هوابرد با دشواری‌هایی روبرو هستیم که در گرانی‌سنجی زمینی وجود ندارند، این دشواری‌ها شامل:

- سرعت بالای هواپیما ایجاب می‌کند که اندازه‌گیری‌ها در بازه‌های زمانی کوچک صورت گیرند و سیستم موقعیت‌یابی دارای دقت بالایی باشد.

- طیف وسیع توزیع شتاب‌ها نیازمند تشخیص، تعدیل و فیلتر کردن مناسب داده‌هاست.

- تغییرات ارتفاع مسیر پرواز بر روی مقدار گرانی اثر مستقیم دارد.

- بزرگی میدان گرانشی مخصوصاً میدان ناشی از عوامل سطحی با افزایش ارتفاع کاهش و نسبت سیگنال به نوفه در ارتفاع‌های بالاتر افزایش می‌یابد. در حالت کلی افزایش ارتفاع پرواز هواپیما سبب کاهش دقت سیستم گرانی‌سنجی برای طول موج‌های کوتاه می‌شود. همان‌طور که در بالا اشاره شد یکی از مسائل مهم تعیین و جدایی شتاب هواپیما از شتاب گرانی می‌باشد. بزرگی شتاب‌های ناخواسته وابسته به عوامل زیر می‌باشند:

- سیستم موقعیت‌یابی و مسیریابی، که در تعیین موقعیت هواپیما استفاده می‌شود.

- سرعت هواپیما، که هر چه سرعت هواپیما بیشتر باشد اثر آشفتگی کمتر است و شتاب‌هایی با فرکانس بالا کمتر دیده می‌شوند. از طرف دیگر هر چه سرعت هواپیما بیشتر باشد در بازه زمانی مشخصی ناحیه بزرگ‌تری برداشت می‌شود و دقت داده‌های گرانی کاهش می‌یابد. به‌طور معمول دقت داده‌ها برای سرعتی در حدود ۸۰ گره برابر با $\pm 1 \text{ mGal}$ می‌باشد.

- ارتفاع پرواز، با فرض اینکه خطا در همه ارتفاع‌ها یکسان باشد! نسبت سیگنال به نوفه در ارتفاع‌های کم کاهش می‌یابد و در واقعیت خطا در همه ارتفاع‌ها یکسان نیست.

- استفاده از خلبان اتوماتیک (هدایت اتوماتیک)، سبب می‌شود پرواز در مسیر هموارتری انجام شود و ارتفاع مرجع را حفظ می‌کند.

- شرایط جوی عادی، شرایط جوی نامناسب و آشفتگی‌های جوی رابطه مستقیم با خطای ظاهری در داده‌ها دارد. توصیه می‌شود که برداشت‌های هوابرد در شب و در هنگامی که میزان آشفتگی ناشی از گرمای زمین ناچیز است، صورت گیرد.

- طراحی و مدل هواپیمای مورد استفاده، که به‌طور معمول از هواپیماهای تک موتوری یا دو موتوری که حرکتی پایدار در سرعت‌های پایین دارند، استفاده می‌شود.

- طراحی خطوط برداشت، خطوط برداشت تا حد امکان باید طولانی بوده و موازی با محور ناحیه مورد بررسی باشند. برای اطمینان از کیفیت داده‌ها خطوط پرواز گره‌ای به صورت عمود بر خطوط برداشت و با فاصله برداشتی در حدود ۳ تا ۴ برابر خطوط پرواز اصلی، برداشت می‌شوند [۷].

¹ Resolution

² Non Inertia

در لبه‌ها و دور از مرکز قرار دارد که این امر سبب بزرگ بودن گشتاور ماند دیسک می‌شود. چرخش سریع دیسک و طراحی به کار رفته در ژيروسکوپ سبب می‌شود گشتاور اعمالی خارجی تغییرات دورانی کوچک‌تری را نسبت به حالت عادی ایجاد کند ژيروسکوپ فیبر نوری (FOG)^۳ نیز مانند ژيروسکوپ معمولی نسبت به چرخش حساس می‌باشد. به لیل عدم حساسیت این دستگاه نسبت به عواملی چون تکان‌ها، نوسانات و شتاب‌های خطی اعمالی، این دستگاه از دقت بالایی برخوردار است. برخلاف ژيروسکوپ‌های معمولی که شامل یک دیسک چرخنده می‌باشند این دستگاه شامل هیچ قسمت دارای حرکتی نیست. در این دستگاه دو پرتو نور خارج شده از یک لیزر از داخل یک حلقه از فیبر نوری به طول تقریبی ۵۰ کیلومتر تشکیل شده است، در جهت مخالف هم عبور می‌کنند. در اثر پدیده ساگاناک^۴، پرتو نوری که در خلاف چرخش اعمالی در حرکت است نسبت به پرتو دیگر، به دلیل کاهش مسیر عبوری، داری تأخیر در زمان رسید می‌باشد و تغییر در فاز با استفاده از یک تداخل سنج قابل اندازه‌گیری است.

سیستم ناوبری ماندی (INS)^۵: با اندازه‌گیری شتاب‌های خطی و زاویه‌ای اعمالی بر روی دستگاه می‌تواند تغییرات موقعیت جغرافیایی (مانند حرکت به شمال یا شرق)، تغییرات در سرعت خطی (شامل تغییرات سرعتی و جهتی حرکت) و تغییرات چرخشی به دور محورهای مختلف را به دست آورد. INS شامل یک رایانه و چند شتاب‌سنج و ژيروسکوپ می‌باشد. این سیستم ابتدا سرعت و مکان اولیه را با استفاده از یک سیستم دیگر مانند GPS به دست می‌آورد. سپس سرعت و مکان دقیق در هر لحظه مورد نظر با استفاده از گیرنده‌های حرکتی دستگاه که شامل ژيروسکوپ‌ها و شتاب‌سنج‌ها می‌باشد، به دست می‌آید. مزیت INS در این است که برای به دست آوردن موقعیت، سرعت و میزان چرخش، پس از شروع به کار، نیاز به یک مرجع خارجی یا فرستنده خارجی (بر خلاف GPS) ندارد [۶].

در حالت کلی سه حسگر جهت اندازه‌گیری تغییرات سرعت زاویه‌ای و سه حسگر دیگر جهت اندازه‌گیری شتاب خطی به کار می‌رود. حسگرهای شتاب زاویه‌ای یا ژيروسکوپ‌ها به گونه‌ای قرار دارند که بتوانند تمامی چرخش‌های وسیله در حال حرکت را کنترل کنند. در شکل (۱) چرخش‌های محتمل برای یک هواپیما نشان داده شده است. این چرخش‌ها شامل دوران حول محور عرضی (حرکت بالا و پایین دماغه هواپیما)^۶، دوران حول محور قائم (حرکت چپ و راست دماغه هواپیما)^۷ و دوران حول محور طولی (حرکت ساعت‌گرد و پادساعت‌گرد کابین هواپیما)^۸ می‌باشد. در نهایت یک رایانه با استفاده

سیگنال GPS اعمال می‌شود، که در این حالت کم‌ترین مقدار طول موج در سیگنال از رابطه $\lambda f_j = v$ به دست می‌آید که v سرعت هواپیما می‌باشد.

بنابراین تصحیح خطای محدود^۱ GPS به صورت رابطه (۱۱) تعریف می‌شود:

$$a_{rms} = \sqrt{\langle a^2 \rangle} = (2\pi)^2 \sqrt{502} \left(\frac{v^5}{5\lambda^5} + \frac{f_c^n v^{5-n}}{(5-n)\lambda^{(5-n)}} \right)^{1/2} \quad (11)$$

در گرانی‌سنجی هواپرد نسبت نوفه به سیگنال در حدود ۱۰۰۰ می‌باشد. بخش بزرگی از نوفه‌ها شامل نوفه‌هایی با فرکانس بالا است که ناشی از تک‌انتهای هواپیما می‌باشد.

۳-۱. بخش‌های اساسی دستگاه‌های گرانی‌سنجی هواپرد

شتاب‌سنج‌ها: در حالت ساده شتاب‌سنج از جرمی تشکیل شده است که در اثر اعمال میدان گرانی تغییر مکان می‌دهد و این تغییر مکان با اندازه‌میدان اعمالی در ارتباط است. در حال حاضر سه نوع مختلف شتاب‌سنج در دستگاه‌های مختلف گرانی‌سنجی و گرادیان‌سنجی مورد استفاده قرار می‌گیرند. شتاب‌سنج‌های فنری متداول‌ترین نوع شتاب‌سنج‌ها می‌باشند. در سال‌های اخیر شتاب‌سنج‌های ابرسانایی و شتاب‌سنج‌های تداخل‌سنج اتمی نیز معرفی شده‌اند که از دقت بالایی برخوردار هستند. یک شتاب‌سنج نمی‌تواند شتاب گرانی را اندازه‌گیری کند ولی تغییرات این شتاب که ناشی از تغییرات در نیروی گرانشی و یا تباین چگالی است را می‌تواند اندازه‌گیری کند. با توجه به اصل هم‌ارزی، شتاب‌سنج نمی‌تواند تفاوت میان شتاب‌های ناشی از جاذبه، چرخش و نیروهای اعمالی را تشخیص دهد و این موضوعی است که سبب معرفی روش گرادیان‌سنجی گرانی شده است.

یک جفت شتاب‌سنج که به فاصله معینی از هم و بر روی محور مشخصی قرار دارند، را در نظر می‌گیریم. با محاسبه تفاوت شتاب‌های اندازه‌گیری شده و تقسیم آن بر فاصله بین دو شتاب‌سنج مقدار گرادیان گرانی در جهت محور شتاب‌سنج‌ها با رابطه $\text{Gravity Gradient} = \frac{A_2 - A_1}{L}$ به دست می‌آید. با اندازه‌گیری گرادیان گرانی شتاب‌های ناشی از وسیله نقلیه حذف می‌شوند و تغییرات شتاب ناشی از میدان گرانی زمین در واحد طول به دست می‌آید [۱۰].

ژيروسکوپ^۲: وسیله‌ای جهت اندازه‌گیری میزان دوران و حفظ آن با استفاده از اصل پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای می‌باشد. در ژيروسکوپ دیسک چرخنده به دور محوری خاص در حال چرخش می‌باشد. طراحی دیسک چرخنده به گونه‌ای است که بیشتر جرم آن

^۳ Fiber Optic Gyroscope

^۴ Sagnac

^۵ Inertial Navigation System

^۶ Pitch

^۷ Yaw

^۸ Roll

^۱ GPS limited Error Correction

^۲ Gyroscope

۲. سیستم GT-1A: این دستگاه در سال ۲۰۰۰ در کشور روسیه جهت مقاصد نظامی و غیرنظامی طراحی و ساخته شده است. این دستگاه توسط شرکت CMG^۵ جهت مقاصد غیرنظامی در خارج از روسیه مورد استفاده قرار می‌گیرد. این دستگاه، دستگاه گرانی‌سنجی هواپرد تک حسگر با سیستم GPS-INS جهت اندازه‌گیری مؤلفه‌ی قائم میدان گرانی می‌باشد که دارای سکوی پایدارکننده‌ی سه محوره است. داده‌برداری‌ها در دو بازه‌ی دینامیکی مختلف به صورت هم‌زمان صورت می‌گیرد، ± 250 mGal (این بازه دارای تکنیک‌پذیری بیشتری نسبت به بازه‌ی بزرگ‌تر بوده و در هنگامی که شرایط آرام‌تر است) و ± 500 mGal (این بازه هنگامی که شرایط پرواز سخت است و آشفتگی‌ها زیاد هستند مورد توجه قرار می‌گیرد). متوسط دقت این دستگاه برای طول موج‌های مختلف $0/5$ تا $1/5$ میلی‌گال می‌باشد [۱۴].

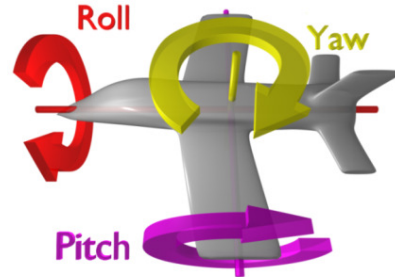
۳. سیستم GT-2A: سیستم GT-2A پس از ۷ سال تجربه کار با دستگاه GT-1A توسط تیمی متشکل از مهندسان روسی و شرکت CMG طراحی و ساخته شد. در مقایسه با سیستم GT-1A در این سیستم پیشرفت‌هایی صورت گرفته است که سبب بالا رفتن حساسیت و بزرگ‌تر شدن بازه دینامیکی دستگاه شده است.

۴. سیستم TAGS AIR III: سیستم L&R-Air II در سال ۱۹۹۰ توسط شرکت لاکوست و لومبرگ^۶ طراحی و ساخت شد و در سال ۱۹۹۵ جهت مصارف اکتشافی و تجاری مورد استفاده قرار گرفت. این سیستم شامل حسگر گرانی متشکل از فنی با میرایی بالا می‌باشد که بر روی سکوی پایدارکننده‌ی دو محوره قرار دارد. بررسی‌های اخیر دقتی در حدود ۲ میلی‌گال را برای این دستگاه نشان می‌دهد. سیستم TAGS AIR III مدل پیشرفته سیستم L&R-Air II است که ساخت شرکت سینترکس^۸ می‌باشد. در این سیستم از مفهوم فنی به طول صفر و سکوی ژيروسکوپی پایدارکننده‌ی دو محوره استفاده شده است. آزمایش‌های انجام شده بر روی دستگاه در سال‌های ۲۰۰۶ تا ۲۰۰۹ بیانگر دقتی کمتر از میلی‌گال برای این دستگاه می‌باشد [۱۴، ۱۵].

۴. گرادیان سنجی هواپرد

اولین بار روش گرادیان گرانی در سال ۱۸۸۶ توسط دانشمند مجارستانی، اتووش به کار گرفته شد. او اولین گرادایومتر پیشچی را ابداع کرد که واحد گرادیان گرانی به افتخار وی اتووش^۷، برابر است با 10^{-4} میلی‌گال بر متر، نام گرفته. نیروی هوایی ایالات متحده در سال ۱۹۷۰ روش گرانی‌سنجی را به دلیل عدم دقت کافی

استفاده از ۶ درجه آزادی ذکر شده (۳ درجه آزادی برای تغییرات خطی و ۳ درجه آزادی برای تغییرات زاویه‌ای) یعنی مقادیر x, y, z و $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ و ترکیب آنها با زمان اندازه‌گیری و حذف اثر جاذبه سرعت در لحظه مورد نظر را محاسبه می‌کند. با استفاده از سرعت به‌دست آمده و مکان اولیه، مکان در لحظه مورد نظر به‌دست می‌آید در مکان‌هایی مانند تونل‌ها و مواقعی که GPS به‌طور موقتی قابل استفاده نمی‌باشد می‌توان از INS استفاده کرد.



شکل ۱. چرخش‌های محتمل برای یک هواپیمای در حال پرواز [۱۱]

سکوی ژيروسکوپی پایدار شده با استفاده از حلقه شاقولی؛ در بسیاری از سیستم‌ها شتاب‌سنج‌ها بر روی یک سکوی ژيروسکوپی پایدار شده با استفاده از حلقه شاقول قرار دارند. حلقه‌های شاقولی شامل سه حلقه می‌باشند که به صورت عمود بر هم مشابه سیستم ژيروسکوپ قرار دارند. این سیستم به سکو اجازه چرخش حول هر محوری را می‌دهد و سکو می‌تواند حرکت خود را حتی زمانی که هواپیما در حال دور زدن است حفظ کند.

۳-۲. دستگاه‌های گرانی‌سنجی امروزی

در حال حاضر در برداشت‌های گرانی‌سنجی هواپرد از چهار دستگاه زیر استفاده می‌شود:

۱. سیستم AIR Grav: این سیستم در سال ۱۹۹۷ توسط شرکت سندر^۳ معرفی گردید. سیستم سخت‌افزار این دستگاه شامل دو ژيروسکوپ با دو درجه آزادی در سکوی غیرماند پایدارکننده^۴ و سه شتاب‌سنج متعامد می‌باشد که در جعبه‌ای با کنترل دمایی وجود دارند. این جعبه حسگرها با استفاده از سه شافل کنترل‌کننده و یک موتور که بر اساس خروجی ژيروسکوپ‌ها عمل می‌کند از حرکت‌های زاویه‌ای هواپیما حفظ می‌شود. می‌توان متوسط دقت این دستگاه را برای طول موج‌های مختلف $0/5$ تا $1/5$ میلی‌گال در نظر گرفت [۱۰، ۱۲، ۱۳].

^۵Canadian Micro Gravity Pty Ltd

^۶Tumkey Airborne Gravity System

^۷Lacoste & Romberg

^۸Scintrex

^۹Eotvos (Eo)

^۱Gimballed Gyrostabilized Platform

^۲Airborne Inertially Referenced Gravimeter system

^۳Sander

^۴Stabilized Inertial Platform

با توجه به اینکه در خارج از چشمه، پتانسیل U در معادله لاپلاس صدق می‌کند، می‌توان نوشت:

$$\nabla^2 U = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (13)$$

$$T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} = 0 \rightarrow T_{zz} = -(T_{xx} + T_{yy}) \quad (14)$$

با توجه به اینکه تانسور T ، تانسوری متقارن است و به عبارتی می‌توان نوشت:

$$T = \nabla G = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{xy} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{bmatrix} \quad (15)$$

بنابر رابطه (۱۵) تانسور T ، تنها دارای ۵ مؤلفه مستقل است [۱۴]. هر یک از مؤلفه‌های تانسور گرانی تفسیر مربوط به خود را دارد و پارامتر هندسی خاصی از چشمه ایجاد بی‌هنجاری را بیان می‌کند (با فرض اینکه محور x در جهت شمال، محور y در جهت شرق و محور z در جهت پایین باشد): ۱. مؤلفه قائم تانسور گرادیان گرانی، T_{zz} ، اثر تمامی لبه‌ها را نشان می‌دهد و ساده‌ترین مؤلفه جهت تفسیر می‌باشد. ۲. مؤلفه‌های T_{xx} و T_{yy} ، به ترتیب لبه‌های شمالی - جنوبی و لبه‌های شرقی - غربی هدف را تعیین می‌کند و جهت تعیین ضخامت هدف می‌توان از آنها استفاده کرد. ۳. مؤلفه‌های T_{yz} و T_{xz} ، به ترتیب محور شمالی - جنوبی و شرقی - غربی جرم بی‌هنجاری را تعیین می‌کنند و همچنین در تعیین لبه‌های شمالی - جنوبی و شرقی - غربی هدف کاربرد دارند. ۴. مؤلفه، T_{xy} ، شکلی به صورت چهار قطبی با ۲ ماکزیمم و ۲ مینیمم دارد که اندازه هدف را در امتداد قطرهای $y = -x$ و $y = x$ تعیین می‌کند [۱۷].

۴-۲. دستگاه‌های اندازه‌گیری گرادیان گرانی

با توجه به نوع سیستم اندازه‌گیری، دستگاه‌های اندازه‌گیری گرادیان گرانی را می‌توان به ۳ گروه مختلف تقسیم کرد:

۱- استفاده از شتاب‌سنج‌های چرخشی^۳: در این نوع دستگاه‌ها از دستگاه گرادیان گرانی، GGI^۴، که نوعی شتاب‌سنج چرخشی می‌باشد، استفاده می‌شود. دستگاه گرادیان گرانی از دو جفت شتاب‌سنج که بر روی یک دیسک نسب شده‌اند تشکیل شده است. گرادیان گرانی با استفاده از تفاوت شتاب ثبت شده بین هر جفت از شتاب‌سنج‌ها در هر دیسک اندازه‌گیری می‌شود [۱۶].

در حال حاضر سه شرکت بزرگ^۵، هر یک به نوعی از این وسیله جهت اندازه‌گیری گرادیان گرانی استفاده می‌کنند. شرکت‌های بل ژئوسپیس و اراکس با استفاده از دستگاه Air-FIT که از سه دستگاه GGI و مجموعاً ۱۲ شتاب‌سنج تشکیل شده است، ۵ مؤلفه مستقل تانسور گرادیان گرانی را در برداشت‌های هواورد اندازه‌گیری

سیستم‌های موقعیت‌یابی در تعیین شتاب وسایل نقلیه کنار گذاشت و این خود سبب پیشرفت روش گرادیان گرانی، به دلیل عدم نیاز به تعیین شتاب هواپیما در این روش گردید. روش گرادیان‌سنجی در مقایسه با روش گرانی‌سنجی اطلاعات بیشتری را در خصوص لبه‌ها و شکل چشمه ایجاد بی‌هنجاری در اختیار قرار می‌دهد. علاوه بر این، این روش حساسیت کمتری نسبت به خطاهای موجود در داده‌های GPS دارد. در سال ۱۹۷۰ اولین سیستم اندازه‌گیری مؤلفه‌های گرادیان گرانی توسط شرکت بل^۱ جهت مقاصد نظامی و به خصوص به منظور موقعیت‌یابی حرکت‌های مخفیانه زیر دریایی‌ها به کار گرفته شد [۱۶]. مهم‌ترین مزیت روش گرادیان گرانی در این موضوع نهفته است که این کمیت نسبت به شتاب هواپیما غیر حساس است و این روش از حساسیت و دقت بیشتری نسبت به روش گرانی‌سنجی برخوردار است. علاوه بر این روش گرادیان گرانی برخلاف روش گرانی‌سنجی نیازی به تصحیحاتی چون: تصحیح عرض جغرافیایی، تصحیح بوگه و تصحیح هوای آزاد ندارد. در روش‌های زمینی، دریایی و هوایی گرانی‌سنجی مؤلفه قائم گرانی، G_z ، اندازه‌گیری می‌شود در حالی که در روش گرادیان گرانی تغییرات مکانی میدان گرانی مورد توجه قرار دارد. بزرگی سیگنال گرادیان گرانی با معکوس مکعب فاصله ($1/r^3$) و بزرگی سیگنال مؤلفه قائم گرانی با معکوس مربع فاصله ($1/r^2$) کاهش می‌یابد. که این موضوع سبب می‌شود روش گرادیان گرانی، فرکانس‌های بالا را که ناشی از عوارض سطحی می‌باشند را بهتر و واضح‌تر از روش گرانی‌سنجی نمایش دهد در گرانی‌سنجی هواورد بزرگی میدان گرانی طبیعی زمین در حدود ۹۸۱۰۰۰ میلی‌گال و بی‌هنجاری‌های گرانی در حدود ۰/۱ میلی‌گال تا ۱ میلی‌گال است، بنابراین نیاز به بازه دینامیکی در حدود ۱ در میلیون می‌باشد. در گرادیان‌سنجی هواورد بزرگی گرادیان گرانی زمین در حدود ۳۸۰۰ اتووش و بی‌هنجاری‌های آن از مرتبه ۱ تا چند ۱۰ اتووش می‌باشد، پس نیاز به بازه دینامیکی در حدود ۱ در ۳۰۰۰ است. بنابراین نسبت سیگنال دریافتی به سیگنال زمینه در روش گرادیان‌سنجی سه مرتبه بزرگ‌تر از روش گرانی‌سنجی می‌باشد [۶].

۴-۱. تانسور گرادیان گرانی (GGT^2)

میدان گرانی به صورت گرادیان پتانسیل نرده‌ای U تعریف می‌شود و مشتق مرتبه بعدی این پتانسیل تحت عنوان گرادیان گرانی یا تانسور مرتبه دوم پتانسیل نرده‌ای U به صورت رابطه (۱۲) تعریف می‌شود:

$$T = \nabla U = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \quad (12)$$

³Rotating Accelerometer

⁴Gravity Gradient Instrument

⁵BHP Billiton, ARKEX, Bell Geospace

¹BELL

²Gravity Gradient Tensor

گرادین سنج گرانی که از تداخل سنج اتمی استفاده می‌کند بر پایه خاصیت کوانتومی دوگانگی ذره-موج می‌باشد. بر اساس مکانیک کوانتومی، اتم‌ها رفتاری مشابه موج‌ها، مانند نور، دارند. بنابراین یک تداخل سنج (دستگاهی که الگوی حاصل از برهم‌نهی چند موج را نشان می‌دهد) جهت اندازه‌گیری و بررسی خاصیت ذره-موج می‌توان ساخت.

دستگاه اندازه‌گیری گرادین تداخل سنجی اتمی دانشگاه استنفورد یک پروژه مشترک بین این دانشگاه و آزمایشگاه پیشرفته جت ناسا می‌باشد. این دستگاه گرادین سنج دارای دو شتاب سنج گرانی کوانتومی می‌باشد در فاصله مشخصی از یکدیگر قرار دارند. دقت این دستگاه در بررسی‌های آزمایشگاهی در حدود ۱۰ اتووش ارزیابی شده است [۱۶].

۵. شبیه‌سازی داده‌های گرانی سنجی و گرادین سنجی گرانی حاصل از سازه زیرزمینی

پتانسیل گرانی را می‌توان به صورت رابطه (۱۶) بیان کرد:

$$U(p) = \gamma \int \frac{\rho}{r} dv \quad (16)$$

که در آن ρ چگالی، r فاصله و dv المان حجم مورد نظر می‌باشد. میدان گرانی به صورت گرادین پتانسیل U به صورت رابطه (۱۷) قابل تعریف است:

$$g(p) = \nabla U = -\gamma \int \rho \frac{\vec{r}}{r^2} dv \quad (17)$$

با توجه به اینکه انواع گرانی سنج‌ها مؤلفه قائم میدان گرانی را اندازه‌گیری می‌کنند می‌توان نوشت:

$$g(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial z} = -\gamma \int \int \int \rho(x', y', z') \frac{(z - z')}{r^3} dx' dy' dz'$$

که در آن: $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ سازه‌های مکعبی شکل را با ابعادی به صورت $x_1 \leq x \leq x_2$ و $y_1 \leq y \leq y_2$ و $z_1 \leq z \leq z_2$ در نظر می‌گیریم. در این صورت مؤلفه قائم گرانی از رابطه (۱۸) به دست خواهد آمد:

$$g = \gamma \rho \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{z'}{[x'^2 + y'^2 + z'^2]^{\frac{3}{2}}} dx' dy' dz' \quad (18)$$

که جهت سادگی نقطه اندازه‌گیری بر مبدأ قرار داده شده است. حاصل انتگرال (۱۸) را می‌توان به صورت رابطه (۱۹) نشان داد [۲۳]:

$$g = \gamma \rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \left[z_k \arctan \frac{x_i y_j}{z_k R_{ijk}} - x_i \log(R_{ijk} + y_j) - y_j \log(R_{ijk} + x_i) \right] \quad (19)$$

$$R_{ijk} = \sqrt{x_i^2 + y_j^2 + z_k^2} \quad \text{که در آن}$$

$$\mu_{ijk} = (-1)^i (-1)^j (-1)^k$$

می‌کنند. شرکت بیلی تون با استفاده از دستگاه FALCON AGG، مؤلفه قائم گرانی و مؤلفه قائم گرادین گرانی را با استفاده از ۸ شتاب سنج در برداشت‌های هوابرد اندازه‌گیری می‌کند. دقت هر دو دستگاه در حدود ۵ اتووش می‌باشد [۱۷ و ۱۹].

۲- استفاده از شتاب سنج‌هایی با خاصیت ابرسانایی: دو ویژگی مهم ابرساناها که در دستگاه‌های ابرسانایی گرادین سنجی گرانی، SGG^۱، مورد توجه قرار می‌گیرد شامل، اثر Meissner و گسسته یا کوانتیده بودن شار مغناطیسی عبوری در اندازه‌گیری نیروی لازم جهت ثابت نگه‌داشتن جرم مؤثر شناور می‌باشد. اندازه‌گیری گرادین با استفاده از یک جفت شتاب سنج ابرسانایی با میزان نوفه‌ی پایین و دقت بالا انجام می‌گیرد. این سیستم‌ها از تعادل بالایی برخوردار هستند که شتاب‌های ناخواسته خطی و زاویه‌ای نمی‌توانند در اندازه‌گیری‌های سیستم اختلال ایجاد کنند [۱۶ و ۱۸]. اولین دستگاه گرانی سنج ابرسانایی توسط دکتر پایک^۲ استاد دانشگاه مرلیند امریکا در پروژه‌ای مشترک با ناسا ساخته شده است. این سیستم شامل سه جفت شتاب سنج قائم عمود بر هم می‌باشد که گرادین گرانی را در جهت سه محور عمود بر هم اندازه‌گیری می‌کند. ماده ابرسانایی به کار رفته نیوبوم^۳ می‌باشد که در محفظه سرد کننده‌ای شامل هلیوم قرار دارد. در اندازه‌گیری‌ها دقتی در حدود ۰/۰۲ اتووش در فرکانس ۱ هرتز برای این دستگاه به دست آمده است. دستگاه EGG^۴ توسط John Lumley در شرکت ابزار ابرسانایی اکسفورد طراحی و ساخته شده است که از سال ۲۰۰۸ در شرکت ژئوفیزیکی انگلیسی ARKEX در حال استفاده می‌باشد. دستگاه EGG مؤلفه گرادین قائم گرانی را با اندازه‌گیری دو مؤلفه افقی گرادین گرانی، T_{xx} و T_{yy} ، اندازه‌گیری می‌کند و به گونه‌ای طراحی شده است، که دارای دقتی در حدود ۱ اتووش در فرکانس ۱ هرتز می‌باشد [۱۶]. دستگاه گرادین سنج هوابرد HD-ADD^۵ یکی دیگر از دستگاه‌های گرادین سنجی با استفاده از خاصیت ابرسانایی می‌باشد که در پروژه‌ای مشترک بین دانشگاه وسترن استرالیا، دانشگاه مرلیند، آژانس فضایی کانادا و شرکت Gedex ساخته شده است. ابعاد این دستگاه در حدود ابعاد سایر دستگاه‌های گرادین سنجی می‌باشد. سکوی پایدار کننده این دستگاه Geo MIM نام دارد که فرآورده مشترکی از شرکت جی دکس^۶ و آژانس فضایی کانادا می‌باشد. دقت گرادین گرانی اندازه‌گیری شده توسط این دستگاه در حدود ۱ اتووش می‌باشد [۲۱].

۳- استفاده از شتاب سنج‌های تداخل سنج اتمی، AI^۷: این نوع

^۱ Superconductivity Gravity Gradiometer

^۲ Ho Jung Paik

^۳ Niobium

^۴ Exploration Gravity Gradiometer

^۵ High Definition Airborne Gravity Gradiometer

^۶ GEDEX

^۷ Atomic Interferometer

در شکل های (۲)، (۳)، (۴)، (۵)، (۶) و (۷) داده های شبیه سازی شده گرانی و گرادیان قائم گرانی حاصل از سازه مذکور به ترتیب برای سطح زمین و ارتفاع های ۱۰۰، ۳۰۰، ۵۰۰، ۷۰۰ و ۱۰۰۰ متر، نشان داده شده است.

جدول ۲. ماکزیمم دامنه گرادیان قائم گرانی مشاهده شده برای ارتفاع های مختلف.

ارتفاع پرواز (متر)	ماکزیمم دامنه گرادیان قائم گرانی مشاهده شده (تووش)
سطح زمین	۱۱۵/۱۶۶
۱۰۰	۴۲/۷۳۰
۳۰۰	۱۵/۲۷۷
۵۰۰	۵/۸۳۹
۷۰۰	۲/۶۶۷
۱۰۰۰	۱/۰۶۱

۶. نتیجه گیری

پیشرفت های سریعی که ناشی از اختصاص بودجه های هنگفت توسط وزارت دفاع امریکا و روسیه در ۱۰ سال گذشته در دستگاه های گرانی سنجی و گرادیان سنجی به وجود آمده خود گویای اهمیت این روش و کاربردهای فراوان آن می باشد.

با توجه به دقت دستگاه های Lacoste & Lomberg Air-Sea II ، TAGS AirIII ، AIRGrav و GT-1A (که به ترتیب در حدود ۲ میلی گال، کمتر از ۱ میلی گال، ۰/۵ تا ۱/۵ میلی گال می باشند) می توان با استفاده از شبیه سازی های انجام شده بیشترین ارتفاع پرواز را که دستگاه های مختلف گرانی سنجی قادر به شناسایی سازه زیرزمینی مورد نظر می باشند، در حدود ۳۰۰ متر برآورد کرد. با در نظر گرفتن دقت دستگاه های گرادیان سنجی گرانی که در فاصله ۱ تا ۱۰ اتووش قرار دارد و مقایسه آن با دامنه بی هنجاری های شبیه سازی شده در ارتفاعات مختلف می توان مشاهده کرد که روش گرادیان گرانی قادر است سازه مورد نظر را با ارتفاع پروازی بیشتر از ۱۰۰۰ متر شناسایی کند.

البته با توجه با پارامترهایی چون: متوسط چگالی منطقه ساخت سازه، بزرگی سازه مورد نظر و تباین چگالی موجود بین سازه و محیط اطراف

این ارتفاع هم برای روش گرانی سنجی و هم برای روش گرادیان سنجی گرانی قابل تغییر است.

بنابراین با در نظر گرفتن ابعاد و تباین چگالی سازه زیرزمینی با محیط اطراف و استفاده از شبیه سازی داده های گرانی حاصل از سازه زیرزمینی می توان احتمال کشف سازه را جهت دستگاه های مختلف با ارتفاع پروازهای متفاوت تخمین زد و راهکارهای مناسبی را جهت کاهش احتمال کشف سازه توسط عوامل دشمن معرفی کرد.

با مشتق گیری از رابطه (۱۹) می توان روابط مربوط به T_{xx} و T_{yy} محاسبه کرد و در نهایت رابطه T_{zz} را به دست آورد [۲۲].

$$T_{xx} = \gamma \rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \left[\arctan \left(\frac{(y-y_j)(z-z_k)}{(x-x_i)R_{ijk}} \right) \right] \quad (20)$$

$$T_{yy} = \gamma \rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \left[\arctan \left(\frac{(x-x_i)(z-z_k)}{(y-y_j)R_{ijk}} \right) \right] \quad (21)$$

$$T_{zz} = -(T_{xx} + T_{yy}) \quad (22)$$

با استفاده از روابط (۱۹)، (۲۰)، (۲۱) و (۲۲) می توان بی هنجاری گرانی و مؤلفه قائم گرادیان گرانی حاصل از یک سازه مکعبی شکل را مدل کرد. با توجه به متوسط چگالی سنگ های پوسته زمین که در حدود ۲۶۷۰ کیلوگرم بر مترمکعب می باشد می توان یک سازه مکعبی شکل را که شامل ادواتی با چگالی تقریبی معلومی است، مدل کرد. در این مقاله تباینی در حدود ۲۰۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب برای سازه زیرزمینی نسبت به محیط اطراف در نظر گرفته شده است. در شبیه سازی های انجام شده سازه های با ابعاد ۵۰۰ × ۵۰۰ متر و ارتفاع ۲۰ متر که در عمق بین ۳۰ تا ۵۰ متر در زیر زمین قرار دارد، در نظر گرفته شده است. جهت نزدیکی داده های شبیه سازی شده به واقعیت ۵٪ نوفه ای اتفاقی به داده ها اضافه شده است. جهت تعیین احتمال کشف این سازه بی هنجاری حاصل از این سازه بر روی سطح زمین و ارتفاع های مشخصی مدل سازی شده است.

ارتفاع های مورد نظر شامل ۱۰۰ متر، ۲۰۰ متر، ۳۰۰ متر، ۵۰۰ متر، ۷۰۰ متر و ۱۰۰۰ متر بالای سطح زمین می باشد. در جداول (۱) و (۲) به ترتیب ماکزیمم دامنه بی هنجاری گرانی مشاهده شده و ماکزیمم دامنه گرادیان قائم گرانی مشاهده شده برای ارتفاع های مختلف نشان داده شده است.

با مقایسه بزرگی بی هنجاری به دست آمده و دقت دستگاه های گرانی سنجی معرفی شده احتمال کشف سازه زیرزمینی قابل بررسی خواهد بود.

جدول ۱. ماکزیمم دامنه بی هنجاری گرانی مشاهده شده برای ارتفاع های مختلف.

ارتفاع پرواز (متر)	ماکزیمم دامنه بی هنجاری گرانی مشاهده شده (میلی گال)
سطح زمین	۱/۴۳۷
۱۰۰	۰/۹۲۳
۳۰۰	۰/۳۸۳
۵۰۰	۰/۱۸۹
۷۰۰	۰/۱۱۰
۱۰۰۰	۰/۰۵۸

نشود زیرا میکروگرانی سنجی دقت قابل توجهی را در کشف اهداف با ابعاد کوچک دارد اما عمیق بودن آن باعث جلوگیری از کشف خواهد شد.

ثقل‌سنجی برای آشکارسازی اهداف زیرسطحی در مناطقی که از لحاظ چگالی همگن هستند (مانند زیردریایی‌ها در دریاها و اقیانوس-ها) روش موفق‌تری است.

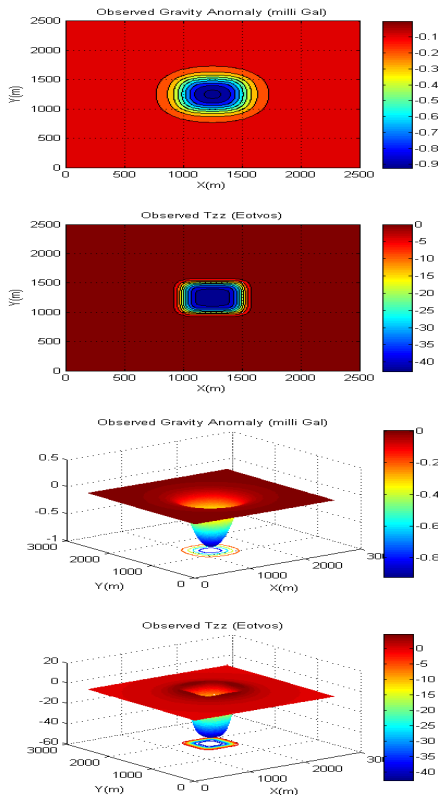
اختلاف چگالی بین مواد غیر معدنی و فلزی کم است بنابراین امکان یافتن سازه‌هایی با جنس غیر فلزی در عمق زیاد ضعیف است. اما اختلاف چگالی بین مواد معدنی و فلزی زیاد است و امکان یافتن سازه‌هایی با جنس فلزی در عمق زیاد بیشتر است.

یکی از پارامترهای تأثیرگذار در آشکارسازی اهداف مدفون هندسه زمین می‌باشد بطوریکه چیدمان خارجی سطح می‌تواند شیوه ثقل‌سنجی را بی‌اثر نماید. طبیعی است هر چه چیدمان خارجی سطح پیچیده و بزرگ (از لحاظ وزنی) باشند، به دلیل تأثیرات زیاد بر ثقل‌سنجی، آشکارسازی ناهنجاری‌های ثقلی مشکل‌تر می‌شود.

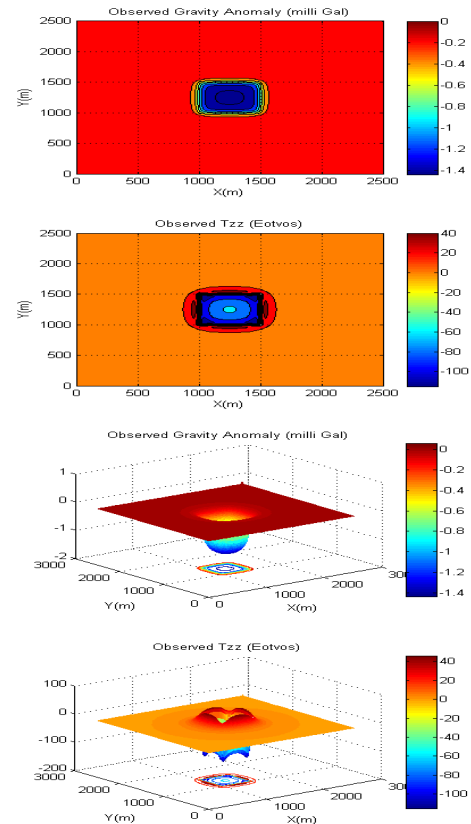
می‌توان از راهکارهایی چون: استفاده از بتون‌هایی با چگالی بالا و دیوارهای عریض جهت کاهش تباین چگالی موجود، استفاده از مدل اتفاقی زمین‌شناسی منطقه در استتار مناطق با چگالی مختلف و همچنین استفاده از سقف‌های ضخیم به صورتی که هم سبب افزایش مقاومت سازه شده و هم سبب کاهش تباین چگالی موجود می‌شوند استفاده کرد. البته در مواردی که می‌توان سازه مورد نظر را به چند زیر سازه با ابعاد کوچک‌تر تقسیم کرد، راهکارهای ذکر شده تأثیر بیشتر خواهند داشت.

به طور کلی راهکارهای موثر جهت کاهش احتمال شناسایی سازه‌های مدفون و بهبود فرایند استتار در مقابله با سنجنده‌های هواپایه به شرح ذیل ارائه می‌گردد.

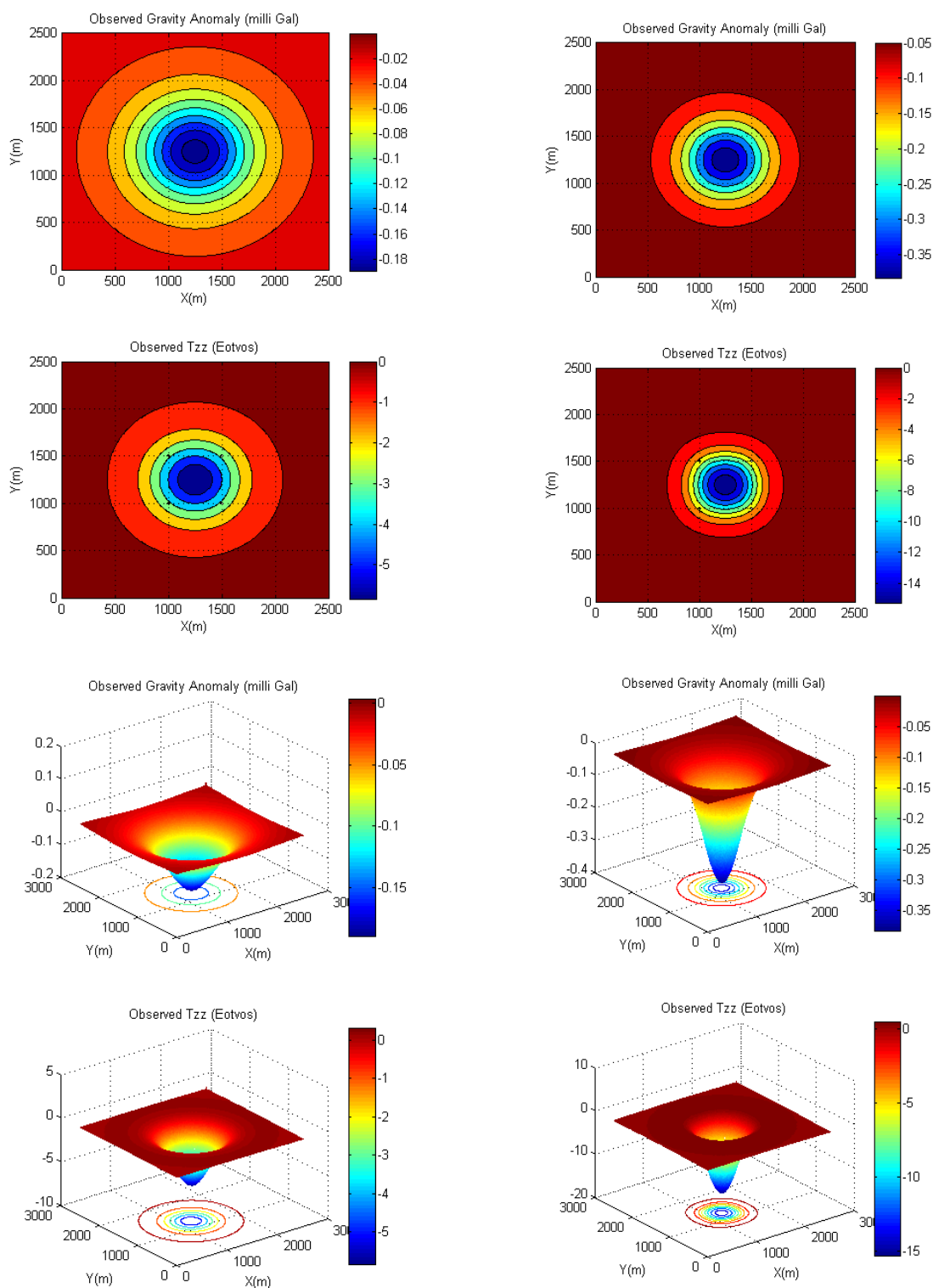
شناسایی اهداف مدفون در این روش در صورتی امکان‌پذیر می‌باشد که هدف دارای اختلاف چگالی با محیط اطراف خود باشد. لذا وجود جرم‌های با چگالی مختلف در اطراف هدف به‌عنوان نویز تلقی گشته و دشمن را در شناسایی هدف گمراه می‌سازد. کوچک بودن ابعاد و همچنین عمق زیاد هدف مدفون باعث خواهد شد که هدف کشف



شکل ۳. داده‌های گرانی و گرادیان قائم گرانی حاصل از شبیه‌سازی سازه مورد نظر در ارتفاع ۱۰۰ متری.

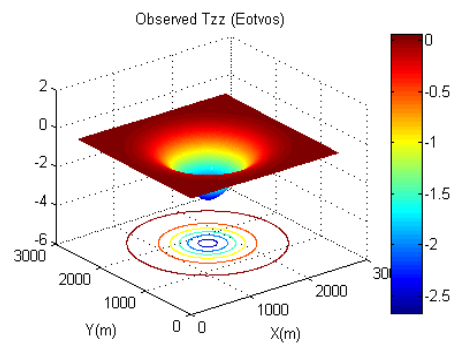
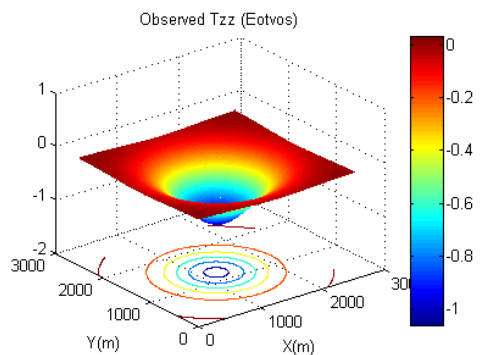
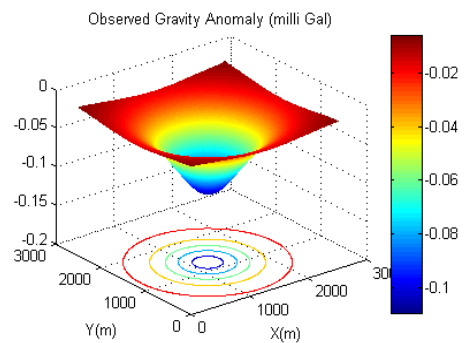
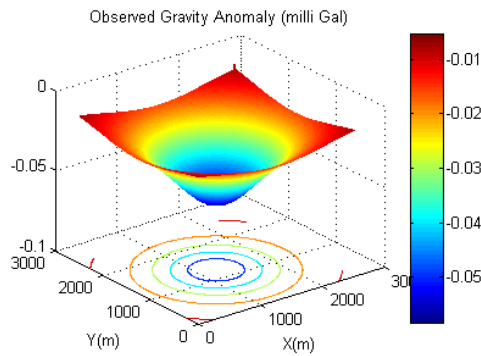
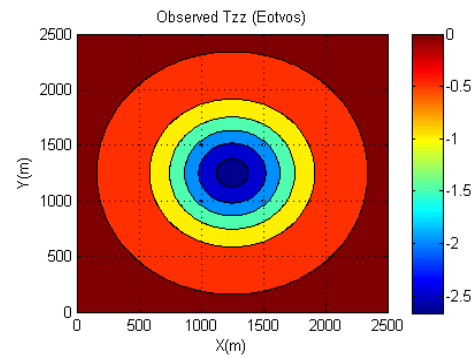
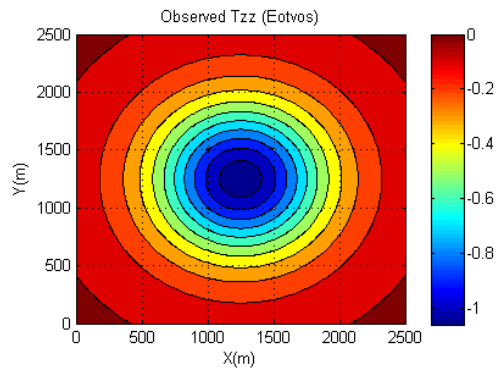
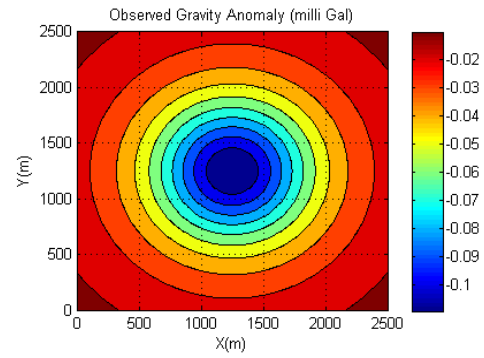
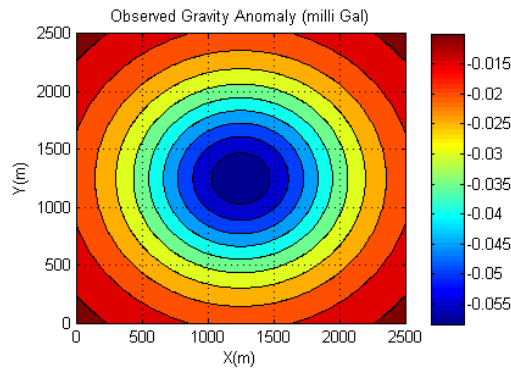


شکل ۴. داده‌های گرانی و گرادیان قائم گرانی حاصل از شبیه‌سازی سازه مورد نظر در سطح زمین.



شکل ۴. داده‌های گرانی و گرادیان قائم گرانی حاصل از شبیه‌سازی سازه مورد نظر در ارتفاع ۳۰۰ متری.

شکل ۵. داده‌های گرانی و گرادیان قائم گرانی حاصل از شبیه‌سازی سازه مورد نظر در ارتفاع ۵۰۰ متری.



شکل ۷. داده‌های گرانی و گرادیان قائم گرانی حاصل از شبیه‌سازی سازه مورد نظر در ارتفاع ۱۰۰۰ متری.

شکل ۶. داده‌های گرانی و گرادیان قائم گرانی حاصل از شبیه‌سازی سازه مورد نظر در ارتفاع ۷۰۰ متری.

۷. مراجع
- [12] Ferguson, S. T.; Hammada, Y. "Experiences with AIR-Grav: Results from a New Airborne Gravimeter."; In: Proceedings of the IAG International Symposium 'Gravity, Geoid and Geodynamics 2000', Volume 123 of IAG Symposia, Banff, Canada, 2001.
- [13] Sander, S.; Argyle, M.; Elieff, S.; Ferguson, S.; La voie, V.; Sander, L. "The Airgrav Airborne Gravity System"; CSEG Recorder, 2005.
- [14] Beiki, M.; "New Techniques for Estimating of Source Parameters."; Ph.D. Dissertation, Univ. of Uppsala, 2011.
- [15] TAGS Features and Specifications, <http://www.microgla-coste.com/tagsspecs.php>[online].
- [16] Rogers, M. "An Investigation into the Feasibility of Using a Modern Gravity Gradient Instrument for Passive Aircraft Navigation and Terrain Avoidance."; M.Sc. Thesis, Air Force Institute of Technology, Air University, USAF, 2009.
- [17] Murphy, C. A. "The Air-FTG Airborne Gravity Gradiometer System."; in Abstracts from the ASEG-PESA Airborne Gravity Workshop: Geoscience Australia Record, 7-14, 2004.
- [18] Brett, J. "Theory of FTG Measurements." http://www.bellgeo.com/tech/technology_theory_of_FTG.html
- [19] Dransfield, M. H.; Lee, J. B. "The Falcon Airborne Gravity Gradiometer Survey Systems."; In R. Lane, ed., Airborne Gravity 2004, the ASEG-PESA Airborne Gravity Workshop, Australia, Extended Abstracts, 15-19, 2004.
- [20] Harman, P. G. "BHP Billiton's Airborne Gravity Gradiometer, FALCON."; Mining 2001 Conference Melbourne Australia, 8 November, 2001.
- [21] High Definition Airborne Gravity Gradiometer Gedex HD-AGG. <http://www.gedex.ca/pdf/tech2.pdf>
- [22] Nagy, D.; Papp, G.; Benedek, J. "The Gravitational Potential and its Derivatives for the Prism."; Journal of Geodesy 2000, 74, 552-560.
- [1] Sepp, E. M. "Deeply Buried Facilities: Implications for Military Operations."; Occasional Paper No. 14, Centre for strategy & Technology Air War College, 2000.
- [2] Linger, D. A.; Baker, G. H.; Little, R. G. "Application of Underground Structures for the Physical Protection of Critical Infrastructures."; North American Tunneling, Ozdemir (ed). Swets & Zetlinger, Lisse. ISBN 905809376X, 2002.
- [3] Stolarezyka, L. G.; Troublefield, R.; Battis, J. "Detection of Underground Tunnels with a Synchronized Electromagnetic Wave Gradiometer."; Sensors and C3I Technologies for Homeland Security and Defense, IV, edited by Edward M. Carapezza, Proceedings, SPIE, 5778, 2005.
- [4] Amin M. "Toward Self-Healing Infrastructure Systems."; IEEE Computer Application Power, 20-28, 2001.
- [5] Telford, W. M.; Geldart, L. P.; Sheriff, R. E. "Applied Geophysics."; Cambridge University Press, 1990.
- [6] Alberts, B. "Regional Gravity Field Modeling Using Airborne Gravimetry Data."; NCG, Nederlandse Commissie voor Geodesie, 2009.
- [7] Hannah, J., "Airborne Gravimetry: A Useful Tool in New Zealand."; Geomatics Research Australasia, No.76, June, 5974, 2001
- [8] Wooldridge, A. "Review of Modern Airborne Gravity Focusing on Results from GT-1A Surveys."; First Break, 28, 85-92, 2010.
- [9] Van Kann, F. "Requirement and General Principle of Airborne Gravity Gradiometers for Mineral Exploration."; In R. Lane, ed., Airborne Gravity, the ASEG-PESA Airborne Gravity Workshop, Australia, Extended Abstracts, 1-6, 2004.
- [10] Difrancesco, D. "Advances and Challenges in the Development and Deployment of Gravity Gradiometer Systems."; EGM 2007 International Workshop, 2007.
- [11] Rose, M. E. "Elementary Theory of Angular Momentum."; New York, NY: John Wiley & Sons (published 1995), ISBN 978-0-486-68480-2, 1957.