

## تغییر پذیری مقاومت سازه‌ای در شبیه‌سازی جهتی در فضای بارگذاری

محمد رضا معرف‌زاده\*

استادیار، گروه عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه جامع امام حسین(ع)

(دریافت: ۱۳۹۰/۰۲/۲۴، پذیرش: ۱۳۹۰/۱۱/۲۶)

### چکیده

شبیه‌سازی جهتی در میان تکنیک‌های مختلف برای تحلیل قابلیت اعتماد سیستم‌های سازه‌ای، کاملاً شناخته شده می‌باشد. در این میان، شبیه‌سازی جهتی در فضای بارگذاری به علت مزایای قابل ملاحظه خود به واسطه ایجاد فضای کاری با ابعاد کمتر، از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشد. همان‌طور که انتظار می‌رود در این فضا، به علت تغییر پذیری مقاومت سازه‌ای، محل حالت (حالت‌های) حدی در راستای هر شعاع شبیه‌سازی شده دیگر محلی ثابت نبوده و بایستی با آن همانند یک متغیر تصادفی برخورد نمود. بنابراین، دقت نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی در فضای بارگذاری، بستگی زیادی به چگونگی احتساب این متغیر تصادفی و مدل احتمالاتی آن در تحلیل پیدا می‌کند. به منظور توصیف احتمالاتی این متغیر تصادفی، یک راه حل ابتدائی استفاده از تنها دو لنگر اول آن و به عبارت دیگر لحاظ تابع توزیع نرمال می‌باشد. در این مقاله تلاش می‌شود ابتدا تحقیق شود که این راه حل چه تأثیری روی دقت نتایج (تخمین احتمال خرابی سازه‌ای) ممکن است داشته باشد. همچنین در این مقاله برای حالاتی که راه حل ابتدائی گفته شده منجر به جواب‌های با دقت ضعیف می‌شود راه‌حل‌های جایگزین برای ارتقاء کیفیت کار در فضای بارگذاری پیشنهاد می‌گردد. در مثال‌هایی که در این مقاله می‌آیند کیفیت و کارایی راه‌حل‌های جایگزین پیشنهادی با راه‌حل ابتدائی یاد شده مقایسه خواهند شد و در انتها توصیه‌هایی عملی ارائه خواهند شد.

کلیدواژه‌ها: شبیه‌سازی جهتی، فضای بارگذاری، تغییر پذیری مقاومت، لنگر هرمیت.

## Structural Resistance Variability in Directional Simulation in Load Space

M. R. Moarefzadeh

Department of Civil Engineering, Imam Hossein University

(Received: 05/14/2011, Accepted: 02/15/2012)

### Abstract

*Directional simulation, among techniques for reliability analysis of engineering structures, is well known. In this context, directional simulation in load space, because of the advantages of lower dimension of working space, is of considerable interest. As expected due to structural resistance variability, the location of the relevant limit state(s) along any simulated direction, is no longer constant and must be taken as a random variable. The accuracy of the results obtained using this type of simulation therefore depends on how well this random variable probabilistically is modeled in analysis. In order to describe probabilistic properties of this random variable, one simplified solution is to use only the first two moments which implies the use of normal distribution. This paper intends first to verify how taking this distribution may affect the accuracy of the results (i.e. estimation of the probability of failure) and second, to propose alternative solution(s) in order to enhance the quality of the method in the cases where the above simplified method may lead to poor results. In the examples given in this paper, the quality and workability of the proposed solution(s) are compared with the simplified solution and finally some practical recommendations are given.*

**Keywords:** Directional Simulation, Load Space, Resistance Variability, Hermite Moment.

\* Corresponding author E-mail: mmrfzd@ihu.ac.ir

## ۱. مقدمه

است [۵، ۱]. فرض کنید مسئله قابلیت اعتماد یک سیستم سازه‌ای توسط  $m$  متغیر تصادفی مستقل از زمان (که به‌طور معمول مشخصه‌های مقاومتی سازه هستند) و  $n$  فرآیند بارگذاری ایستای پیوسته وابسته به زمان که به ترتیب مؤلفه‌های دو بردار  $Y$  و  $Q$  می‌باشند توضیح داده می‌شود. به‌علاوه فرض کنید که خرابی سیستم زمانی اتفاق بیافتد که یک یا چند حالت حدی  $G_i[Y, Q] = 0$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) که در آن،  $k$  تعداد حالت‌های حدی می‌باشد) در طول مدت زمان تحت مطالعه نقض گردند.

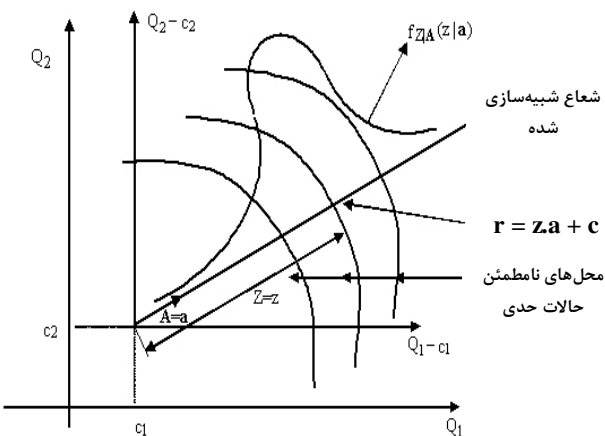
روش شبیه‌سازی جهتی مستلزم فرمول‌بندی مسئله در سیستم مختصات (آبر) قطبی می‌باشد. در این سیستم مختصات بردار  $Q$  را می‌توان به شکل زیر نشان داد:

$$Q = E A + C \quad (1)$$

که در آن  $E$  متغیر شعاع بوده و نشان‌دهنده فاصله مرکز  $C$  (که می‌تواند به‌طور اختیاری انتخاب گردد) از هر نقطه در فضای  $(E, A)$  می‌باشد و  $A$  بردار واحد متغیرهای جهتی بوده که دارای تابع چگالی احتمال  $f_A(a)$  می‌باشد.

به‌منظور احتساب نااطمینانی‌های مربوط به محل حالت‌های حدی در فضای بارگذاری، تابع چگالی احتمال  $f_{Z|A}(z|a)$  در نظر گرفته می‌شود که در آن  $Z$  فاصله مرکز تا سطح حالت حدی تحت مطالعه می‌باشد. در حالت کلی واضح است که  $Z$  بستگی به جهت  $A = a$  دارد (شکل (۱)). از آنجایی که نقاط روی سطح حالت حدی نشان‌گر مقاومت سازه‌ای  $R$  می‌باشند، عبارت (۱) برای این نقاط می‌تواند به شکل زیر کاهش یابد.

$$R = Z A + C \quad (2)$$



شکل ۱. نمونه‌گیری جهتی در فضای بارگذاری

برای تخمین احتمال خرابی  $p_f$  (یعنی نقض یک یا چند تابع حالت حدی) در طول مدت مفروض  $T$ ، عبارت شناخته شده زیر می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد [۶، ۱۰]:

در میان فن‌های مختلف تخمین قابلیت اعتماد سازه‌ای، شبیه‌سازی جهتی به‌خوبی توسعه یافته است. این فن ابتدا برای استفاده در فضای گوسی استاندارد که در آن تمامی متغیرها/ فرآیندهای تصادفی وجود دارند پیشنهاد گردید [۱]. عمده‌ترین مزیت این روش این بود که در هر نمونه جهتی یک عبارت بسته برای تخمین احتمال خرابی مشروط به جهت شبیه‌سازی شده بلافاصله در دسترس بود. فن یادشده بعدها به‌کار در فضایی تعمیم یافت که در آن تمامی متغیرها / فرآیندهای تصادفی حضور داشتند، با این تفاوت که توزیع آنها ضرورتاً گوسی نبود [۴، ۳]. بعد از آن، ملچرز پیشنهاد کرد که این تکنیک در فضای بارگذاری به‌جای فضایی که همه بارها و مقاومت‌ها وجود دارند مورد استفاده قرار گیرد [۱]. این ایده امکان کار در فضایی را فراهم می‌کرد که ابعاد آن به‌مراتب می‌توانست کمتر از ابعاد فضای کل متغیرها / فرآیندهای حاضر در مسئله باشد و بنابراین امکان عملیات محاسباتی با راندمان بالاتری را فراهم می‌نمود. همان‌طور که انتظار می‌رفت، به‌طور مشهود در این فضا محل حالت‌های حدی مربوطه به علت تغییرپذیری مقاومت سازه‌ای، ثابت نبود. به‌منظور لحاظ کردن این تغییرپذیری روش‌های مختلفی مورد بحث قرار گرفته‌اند [۲].

یک روش مورد بحث این بوده است که برای حالت‌های حدی مشتق‌پذیر با بهره‌گیری از قضیه حد مرکزی، یک توزیع نرمال ساده برای مدل کردن تغییرپذیری محل حالت‌های حدی در امتداد هر جهت شبیه‌سازی شده در نظر گرفته شود. این روش تنها الزام می‌داشت که دو لنگر اول متغیر جهتی مربوطه محاسبه و مورد استفاده قرار گیرد. هر چند این مدل باعث ساده‌سازی محاسباتی فراوانی می‌شود، اما، این نکته از اهمیت زیادی برخوردار می‌باشد که دقت نتایج به‌دست آمده با احتساب این مدل مورد بررسی قرار گیرد. در این مقاله، مسئله توضیح احتمالاتی تغییرپذیری مقاومت سازه‌ای (در امتداد هر جهت شبیه‌سازی شده) با جزئیات بیشتری مورد بحث قرار خواهد گرفت. فقدان دقت محتمل ناشی از فرض بالا بررسی خواهد شد و سپس حالت‌های مختلف مشکلات احتمالی مورد شناسایی قرار گرفته و راه‌حل‌های مناسبی پیشنهاد می‌گردد.

در مقاله ارائه شده، ابتدا توضیح مختصری از روش نمونه‌گیری جهتی در فضای بارگذاری ارائه می‌گردد. سپس، برای توضیح خواص گیرگوسی یک متغیر جهتی در فضای بارگذاری، یک پیشنهاد جدید ارائه می‌گردد و در انتها چند مثال آورده خواهد شد که در آنها، بعضی نتایج نوعی نشان داده می‌شوند.

## ۲. نمونه‌گیری جهتی در فضای بارگذاری

روش شبیه‌سازی جهتی مورد استفاده در این مقاله، برگرفته از مقاله ملچرز و شفاف‌سازی‌های انجام گرفته توسط معرف‌زاده اقتباس شده

### ۳. نمایش دو تابع $f_{Z|A}(\cdot)$ و $F_{Z|A}(\cdot)$

در معادلات (۴) تا (۷) باید دو تابع  $f_{Z|A}(\cdot)$  و  $F_{Z|A}(\cdot)$  معلوم گردند. برای این منظور پیشنهادات مختلفی مورد بحث قرار گرفته‌اند [۱]. برای حالت‌های حدی مشتق‌پذیر با فرض آن که ابعاد بردار  $Y$  (که به‌طور معمول مشخصه‌های مقاومتی سازه را تعریف می‌نمایند) به اندازه کافی بزرگ باشد، نتیجه گرفته شده است که قضیه حد مرکزی می‌تواند مورد استناد قرار گرفته و بنابراین، توزیع گوسی برای نمایش  $f_{Z|A}(\cdot)$  پیشنهاد شده است. این ساده‌سازی تنها دو لنگر اول  $Z$  (مشروط بر معلوم بودن  $A = \mathbf{a}$ ) را لازم می‌دارد. این دو لنگر به‌گونه‌ای که در ادامه می‌آید معلوم می‌گردند. فرض کنید که یک شعاع  $A = \mathbf{a}$  شبیه‌سازی شده باشد. همان‌طور که قبلاً ذکر شد نقطه تقاطع این شعاع با سطح حالت حدی  $G_i[\mathbf{Y}, \mathbf{Q}] = 0$  مقاومت سازه‌ای سیستم یعنی  $R$  را در این جهت نمایش می‌دهد که برای آن معادله (۲) برقرار شده است. با استفاده از این معادله و نظر به این واقعیت که  $R$  تابعی از مؤلفه‌های  $Y$  می‌باشد، متغیر تصادفی  $Z$  می‌تواند به‌طور کامل به‌عنوان تابعی از  $Y$  تعریف گردد (یعنی  $Z = Z(Y)$ ). بنابراین خواص احتمالاتی  $Z$  می‌تواند توسط میانگین و انحراف معیار آن که می‌توانند به مؤلفه‌های  $Y$  مرتبط باشند، نشان داده شوند:

$$\mu_Z = Z(\mu_Y)_{|A=\mathbf{a}} \quad (۸)$$

$$\sigma_Z^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_i d_j \text{cov}(y_i, y_j)_{|A=\mathbf{a}} \quad (۹)$$

که در آن:

$$d_i = \left[ \frac{\partial Z(\mathbf{Y})}{\partial Y_i} \right]_{|\mathbf{Y}=\mu_Y, A=\mathbf{a}} \quad (۱۰)$$

در این عبارات،  $Z(\cdot)$  نمایش  $Z$  به‌عنوان تابعی از  $(\cdot)$  بوده و  $\text{cov}(y_i, y_j)$  مؤلفه  $(i, j)$  ام از ماتریس کوواریانس مؤلفه‌های  $Y$  یعنی  $C_Y$  را نشان می‌دهد. هرگاه  $\mu_Z, \sigma_Z$  معلوم باشند، بلافاصله می‌توان توابع  $f_{Z|A}(\cdot)$  و  $F_{Z|A}(\cdot)$  را ساخت.

هر چند ساده‌سازی بالا صرف‌نظر از ساختار تابع  $Z = Z(\mathbf{Y})$  همیشه می‌تواند به‌کار آید، اما تنها برای حالت‌هایی که در ذیل می‌آیند منتهی به نتایج دقیقی می‌شود:

۱. حالت‌هایی که  $Z = Z(\mathbf{Y})$  خطی بوده و تمامی متغیرهای تصادفی حاضر در آن (یعنی مؤلفه‌های  $Y$ ) دارای توزیعی نرمال باشند.
۲. حالت‌هایی که  $Z = Z(\mathbf{Y})$  بر حسب مؤلفه‌های  $Y$  خطی بوده  $(Y_i)$  می‌تواند هر توزیع دلخواهی داشته باشد) و مؤلفه‌های  $Y$  مستقل و تعداد آنها به اندازه کافی بزرگ باشد، به‌طوری‌که بتوان به قضیه حد مرکزی استفاده کرد.

$$p_f \leq p_{f_0} + (1 - p_{f_0})[1 - \exp(-v_D^+, T)] \quad (۳)$$

که در آن  $p_{f_0}$  و  $v_D^+$  به ترتیب احتمال خرابی اولیه و نرخ متوسط برون‌گذری در طول زمانی  $T$  بوده و می‌توانند توسط عبارات زیر برآورد گردند [۵]:

$$p_{f_0} = \int_{\text{unit sphere}} \left\{ \int_{e=0}^{\infty} F_{Z|A}(e|\mathbf{a}) f_Q(e\mathbf{a} + \mathbf{c}) \frac{|\mathbf{J}_Q|}{f_A(\mathbf{a})} de \right\} f_A(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \quad (۴)$$

$$v_D^+ = \int_{\text{unit sphere}} \left[ \int_{e=0}^{\infty} f_{Z|A}(e|\mathbf{a}) E[\mathbf{n}(\mathbf{a}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}(t)]^+ f_Q(e\mathbf{a} + \mathbf{c}) \frac{|\mathbf{J}_Q|}{f_A(\mathbf{a})} \frac{1}{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{n}(\mathbf{a})} de \right] f_A(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \quad (۵)$$

در این عبارات  $f_{Z|A}(\cdot)$  و  $F_{Z|A}(\cdot)$  به ترتیب تابع چگالی احتمال (PDF) و تابع توزیع تجمعی (CDF) متغیر  $Z$  به‌شرط معلوم بودن  $A = \mathbf{a}$  می‌باشند. در ضمن  $f_Q(\cdot)$  تابع چگالی احتمال مشترک مؤلفه‌های  $Q$  و  $E[ ]^+$  اپراتور امید ریاضی بوده به‌طوری‌که  $E[ ]^+ = 0$  می‌باشد اگر  $E[ ]$  منفی باشد،  $\mathbf{n}(\mathbf{a})$  بردار واحد رو به بیرون و عمود بر سطح حالت حدی در محل برخورد با شعاع  $A = \mathbf{a}$  شبیه‌سازی شده،  $\dot{\mathbf{Q}}(t)$  مشتق زمانی  $\mathbf{Q}(t)$  و بالاخره  $|\mathbf{J}_Q|$  دترمینان ماتریس ژاکوبی می‌باشد که رابطه میان سطح (یا حجم) دیفرانسیلی در فضاهای  $Q$  و  $(E, A)$  را برقرار می‌کند. برای محاسبه انتگرال‌گیری‌ها روی کره واحد در عبارات (۴) و (۵)، شبیه‌سازی جهتی می‌تواند به‌کار گرفته شود. در این حالت عبارات (۴) و (۵) به شکل زیر در خواهند آمد:

$$p_{f_0} = E_A \left[ \int_{e=0}^{\infty} F_{Z|A}(e|\mathbf{a}) f_Q(e\mathbf{a} + \mathbf{c}) \frac{|\mathbf{J}_Q|}{f_A(\mathbf{a})} de \right] \quad (۶)$$

$$v_D^+ = E_A \left[ \int_{e=0}^{\infty} f_{Z|A}(e|\mathbf{a}) E[\mathbf{n}(\mathbf{a}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}(t)]^+ f_Q(e\mathbf{a} + \mathbf{c}) \frac{|\mathbf{J}_Q|}{f_A(\mathbf{a})} \frac{1}{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{n}(\mathbf{a})} de \right] \quad (۷)$$

روش‌های محاسبه عبارات  $E[ ]^+$  و  $\frac{|\mathbf{J}_Q|}{f_A(\mathbf{a})}$  در متن‌های دیگر یافت

می‌شوند و خارج از حیطه بحث این مقاله می‌باشند [۱، ۳].

همان‌طور که از معادلات (۴) و (۵) و یا (۶) و (۷) ملاحظه می‌شود، دو تابع  $f_{Z|A}(\cdot)$  و  $F_{Z|A}(\cdot)$  که اثرات تغییرپذیری مقاومت سازه‌ای (و نیز هر متغیر تصادفی مستقل از زمان دیگر) را تعریف می‌نمایند، نقش مهمی را در محاسبه  $p_{f_0}$  و  $v_D^+$  بازی می‌کنند.

بدین ترتیب، تعریف آنها با دقت هر چه بیشتر از اهمیت زیادی برخوردار می‌باشد. در مباحث ذیل این موضوع با جزئیات مورد بحث قرار خواهد گرفت.

(یا حجم) تعریف شده باید انجام گیرد. به علاوه، محاسبه  $f_{Z|A}(\cdot)$  به نحوی باید انجام شود که غیرخطی بودن تابع  $Z = Z(\mathbf{Y})$  در فضای  $\mathbf{Y}$  به شکل مناسبی لحاظ گشته باشد.

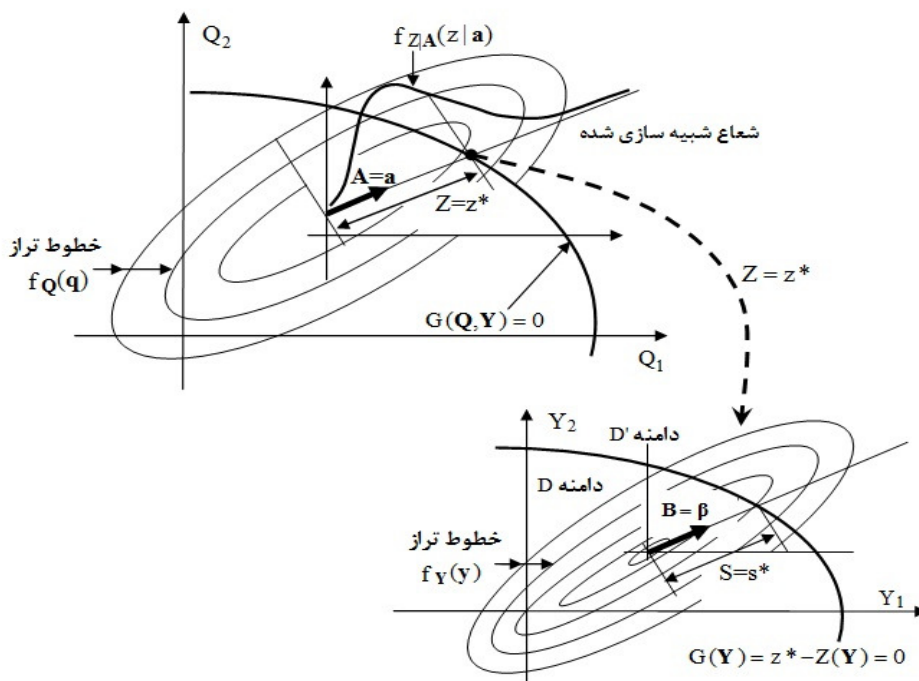
بنابراین برای این کلاس از مسائل، پیشنهاد می شود که روش قابلیت اعتماد مرتبه اول (FORM) یا تکنیک شبیه سازی در فضای  $\mathbf{Y}$  برای محاسبه  $f_{Z|A}(\cdot)$  و  $F_{Z|A}(\cdot)$  استفاده شود. برای رسیدن به این منظور، با معلوم بودن  $Z = z^*$ ، یک تابع برای تقسیم فضای  $\mathbf{Y}$  به دو دامنه  $D$  و  $D'$  تعریف می گردد. دامنه  $D$  چنان تعریف می شود که برای آن  $Z(\mathbf{Y}) > z^*$  بوده و برعکس در دامنه  $D'$ ، مؤلفه های  $\mathbf{Y}$  چنان خواهند بود که  $Z(\mathbf{Y}) < z^*$  (شکل ۲) برای حالت دو بعدی). با استفاده از تعاریف بالا تابع  $F_{Z|A}(z^* | \mathbf{a})$  به شکل زیر داده خواهند شد:

$F_{Z|A}(z^* | \mathbf{a})$  محتوای احتمالاتی دامنه  $D$  (با معلوم بودن  $A=\mathbf{a}$ )  
 یا:  
 $1 - F_{Z|A}(z^* | \mathbf{a})$  محتوای احتمالاتی دامنه  $D'$  (با معلوم بودن  $A=\mathbf{a}$ ).  
 همچنین به منظور محاسبه  $F_{Z|A}(z^* | \mathbf{a})$ ، تئوری پایه ای احتمالات می تواند مورد استفاده قرار گیرد که بر اساس آن  $f_{Z|A}(\cdot)$  مشتق گیری تابع  $F_{Z|A}(\cdot)$  می تواند به دست آید.

متأسفانه شرایط یاد شده همیشه اقلع نشده و فرض های بالا می توانند به نتایج غیردقیقی منجر گردند. در بخش های زیر تلاش می شود که بعضی روش های جایگزین تحقیق شوند که امکان ارتقاء سطح دقت نتایج، حتی اگر حجم بیشتری از محاسبات عددی لازم به انجام باشند را فراهم آورند. برای رسیدن به این مقصود کلاس های مهم زیر برای مسائل مختلف قابلیت اعتماد مورد بحث قرار خواهند گرفت:

### الف) کلاس اول مسائل قابلیت اعتماد

در این کلاس از مسائل قابلیت اعتماد، تابع چگالی احتمال مشترک  $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y})$  فرض می شود یا در دسترس می باشد و یا توزیع های حاشیه ای هر یک از مؤلفه های  $\mathbf{Y}$  قابل دسترسی می باشند. البته در حالت دوم نیز فرض می گردد که ساختار همبستگی میان مؤلفه های  $\mathbf{Y}$  (یعنی ماتریس  $C_Y$ ) در دسترس می باشد. در این حالت،  $Z = Z(\mathbf{Y})$  در حالت عمومی یک تابع چند متغیره غیرخطی است. برای این کلاس از مسائل، محاسبه  $f_{Z|A}(\cdot)$  و  $F_{Z|A}(\cdot)$  اصولاً ساده نبوده و تلاش بیشتری برای دستیابی به نتایج دقیق تر نسبت به تقریب لنگر دوم یاد شده در بالا را طلب می کند. در حقیقت، در اینجا برای محاسبه  $F_{Z|A}(\cdot)$  مسئله عمومی قابلیت اعتماد تحت سؤال بوده به طوری که محاسبه محتوای احتمالاتی داخل یک سطح



شکل ۲. شبیه سازی جهتی در فضا به شرط معلوم بودن  $Z = z^*$  در فضای  $\mathbf{Q} = \mathbf{Z}\mathbf{A} + \mu_Q$

توابع به‌وسیله شبیه‌سازی جهتی با جزئیات بیشتر تشریح شده است. ذکر یک حالت خاص در این کلاس از مسائل ارزشمند است که در آن  $Z = Z(\mathbf{Y})$  یک تابع ساده غیرخطی است که در آن  $\mathbf{Y}$  تنها یک مؤلفه دارد. در این حالت‌ها، تحلیل FORM و یا شبیه‌سازی جهتی در فضای  $\mathbf{Y}$  نیازی نیست و توابع  $f_{Z|A}(\cdot)$  و  $F_{Z|A}(\cdot)$  می‌توانند دقیقاً با حجم محاسبات نوعاً کمی به‌دست آیند. واضح است که در اینجا با معلوم بودن  $Z = z^*$  معادله  $Z = Z(\mathbf{Y})$  می‌تواند حل شده و  $p$  ریشه آن (یعنی  $y_1^r, y_2^r, \dots, y_p^r$ ) (که فرض می‌شود وجود دارند) به‌دست می‌آیند. این ریشه‌ها سپس برای برقراری  $f_{Z|A}(\cdot)$  و  $F_{Z|A}(\cdot)$  با استفاده از تئوری کلاسیک احتمالات مورد استفاده قرار می‌گیرند [۷].

$$f_{Z|A}(z^*|\mathbf{a}) = \left( \sum_{i=1}^p \frac{f_Y(y_i^r)}{|Z'(y_i^r)|} \right) \Big|_{\mathbf{A}=\mathbf{a}} \quad (13)$$

$$F_{Z|A}(z^*|\mathbf{a}) = (P[Z \leq z^*]) \Big|_{\mathbf{A}=\mathbf{a}} = (P[Z(\mathbf{Y}) \leq z^*]) \Big|_{\mathbf{A}=\mathbf{a}} \quad (14)$$

(محتوای احتمالاتی دامنه‌ای از  $\mathbf{Y}$  که در آن  $Z(\mathbf{Y}) \leq z^*$  بوده در حالی که  $\mathbf{A}=\mathbf{a}$  باشد)

در روابط بالا  $y_i^r$ ،  $i$  امین ریشه از کل  $p$  ریشه تابع  $Z(\mathbf{Y}) = z^*$  را نشان می‌دهد.

#### ب) کلاس دوم از مسائل قابلیت اعتماد

در این کلاس از مسائل، تابع چگالی احتمال مشترک مؤلفه‌های  $\mathbf{Y}$  یعنی  $f_Y(\mathbf{Y})$  قابل دسترسی نیست و تنها چند لنگر از مؤلفه‌های  $\mathbf{Y}$  (برای مثال چهار لنگر اول) به‌علاوه ساختار همبستگی میان آنها می‌توانند قابل دسترسی باشند. در این حالت‌ها، ارزیابی دو تابع  $f_{Z|A}(\cdot)$  و  $F_{Z|A}(\cdot)$  برای یک تابع عمومی  $Z = Z(\mathbf{Y})$  آسان نخواهد بود. با این حال، اگر  $Z = Z(\mathbf{Y})$  امکان دستیابی به چهار لنگر اول  $Z$  را فراهم آورد، روش‌هایی چند در سوابق تحقیقاتی وجود دارند که به کمک آنها می‌توان  $f_{Z|A}(\cdot)$  را چنان تقریب زد که در آن یک متغیر تصادفی غیرگوسی به یک متغیر گوسی استاندارد به‌وسیله تعریف یک رابطه تابعی میان آنها ارتباط می‌یابد [۱۰-۸].

در اینجا از مدل لنگر هرمیت که توسط وینترشتاین ارائه شده است، به‌منظور نمایش راه‌حل برای کلاس دوم مسائل مورد استفاده قرار می‌گیرد [۸]. مطابق این مدل یک متغیر غیرگوسی  $Z$  می‌تواند به یک متغیر تصادفی گوسی استاندارد  $U$  از طریق تابع  $Z = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n H_n(U)$  ارتباط داده شود که در آن ضرایب ثابت می‌باشند و به وسیله لنگرهای  $Z$  به‌دست می‌آیند.

همچنین،  $H_n(\cdot)$  تابع هرمیت از مرتبه  $n$  می‌باشد. با فرض استفاده از آنها چهار لنگر اول برای نمایش خواص غیرگوسی متغیرها، (یعنی

همان‌طور که قبلاً ذکر شد برای تخمین دو تابع  $f_{Z|A}(\cdot)$  و  $F_{Z|A}(\cdot)$  دو روش یعنی FORM و شبیه‌سازی می‌توانند مورد بهره‌برداری قرار گیرند. انتخاب هر یک از این روش‌ها به‌طور طبیعی بستگی به‌شدت غیرخطی بودن تابع  $Z = Z(\mathbf{Y})$  دارد. واضح است که اگر  $Z(\mathbf{Y})$  تابعی نرم و نزدیک به خطی باشد، روش FORM جهت صرفه‌جویی در حجم محاسبات لازم ارجحیت می‌یابد.

از طرف دیگر اگر تابع  $Z(\mathbf{Y})$  پیچیده بوده و همچنان کار در فضای بارگذاری (به‌جای فضای اولیه  $(\mathbf{Q}, \mathbf{Y})$ ) ارزشمند ارزیابی گردد، تکنیک شبیه‌سازی ارجح خواهد بود. در این مقاله، شبیه‌سازی جهتی در فضای  $\mathbf{Y}$  پیشنهاد می‌شود و با استفاده از فضای  $\mathbf{Y}$ ، دو تابع  $f_{Z|A}(\cdot)$  و  $F_{Z|A}(\cdot)$  توسط روابط زیر محاسبه خواهند شد:

$$F_{Z|A}(z^*|\mathbf{a}) = \left[ 1 - \int_{\text{unit sphere}} \int_{S=S^*}^{\infty} f_Y(\mathbf{s}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{c}) s^{m-1} ds \right] \Big|_{\mathbf{A}=\mathbf{a}} \quad (11)$$

$$= 1 - E_{\mathbf{B}} \left[ \int_{S=S^*}^{\infty} f_Y(\mathbf{s}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{c}) \frac{s^{m-1}}{f_{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\beta})} ds \right] \Big|_{\mathbf{A}=\mathbf{a}} \quad (11)$$

$$f_{Z|A}(z^*|\mathbf{a}) = \left\{ E_{\mathbf{B}} \left[ f_Y(\mathbf{s}^*\boldsymbol{\beta}+\mathbf{c}) \frac{s^{*m-1}}{|d(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta})|} \frac{1}{f_{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\beta})} \right] \right\} \Big|_{\mathbf{A}=\mathbf{a}} \quad (12)$$

بردار  $\mathbf{d}(\mathbf{Y})$  اینجا چنان تعریف می‌گردد که  $d_i(\mathbf{Y}) = \partial Z(\mathbf{Y}) / \partial y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) (ضمیمه برای جزئیات مربوطه ملاحظه گردد) و  $E_{\mathbf{B}}[\cdot]$  اپراتور امید ریاضی را نسبت به بردار  $\mathbf{B}$  نشان می‌دهد که در آن  $\mathbf{B}$  بردار واحد متغیر جهتی بوده که توزیع چگالی احتمال آن  $f_{\mathbf{B}}(\mathbf{B})$  می‌باشد. همچنین در روابط بالا،  $\mathbf{Y} = \mathbf{S}\mathbf{B} + \mathbf{C}$  در فضای  $\mathbf{Y}$  می‌باشد (شبیه آنچه در فضای  $\mathbf{Q}$  قبلاً گفته شد).

نقطه  $\mathbf{C}$  در اینجا بردار میانگین مؤلفه‌های  $\mathbf{Y}$  (یعنی  $\boldsymbol{\mu}_Y$ ) در نظر گرفته خواهد شد. این نکته از اهمیت برخوردار است که فرمول‌بندی بالا فرض می‌کند که نقطه میانگین  $\boldsymbol{\mu}_Y$  در دامنه  $D$  قرار دارد به‌طوری‌که  $Z(\mathbf{Y}) > z^*$  (به شرط  $A=\mathbf{a}$ ) می‌باشد. واضح است که اگر  $\boldsymbol{\mu}_Y$  در دامنه  $D'$  (که در آن  $Z(\mathbf{Y}) < z^*$ ) باشد، آنگاه  $F_{Z|A}(z^*|\mathbf{a})$  مکمل مقداری خواهد بود که توسط رابطه (۱۱) به دست می‌دهد.

همچنین قابل ذکر است که در روابط (۱۱) و (۱۲) با معلوم بودن مقدار  $Z = z^*$ ،  $\mathbf{Y}^*$  و  $\mathbf{S}^*$  به یکدیگر توسط رابطه  $\mathbf{Y}^* = \mathbf{S}^*\boldsymbol{\beta} + \mathbf{C}$  ارتباط می‌یابند. در ضمیمه، فرمول‌بندی مربوطه برای محاسبه این

تابع حالت حدی به صورت زیر:

$$G[Y, Q] = \sum_{j=1}^m k_j Y_j - \sum_{j=1}^n l_j Q_j = 0 \quad (18)$$

که در آن  $(j=1, 2, \dots, n)$   $l_j$  و  $k_j (j=1, 2, \dots, m)$  ثابت هستند، چهار لنگر اول  $Z$  (البته مشروط بر  $A=a$ ) می توانند استخراج گردند. این لنگرها سپس در مدل لنگر هرمیت که در بالا تشریح شد، برای محاسبه  $f_{Z|A}(\cdot)$  و  $F_{Z|A}(\cdot)$  استفاده خواهند شد. برای انجام این کار، تابع حالت حدی رابطه (۱۸) با استفاده از فرمول بندی شبیه سازی جهتی یعنی  $q_i = F_i = Z a_i + c_i$  به شکل زیر بازنویسی می گردد:

$$\sum_{j=1}^m k_j Y_j - \sum_{j=1}^n l_j (Z a_j + c_j) = 0$$

و بنابراین:

$$z = \frac{1}{\sum_{j=1}^n l_j a_j} \left[ \sum_{j=1}^m k_j Y_j - \sum_{j=1}^n l_j c_j \right] \quad (19)$$

معادله (۱۹) حال می تواند برای تخمین چهار رابطه وابسته به لنگرهای  $Z$  مورد استفاده قرار گیرد. دو رابطه (یعنی میانگین  $\mu_Z$  و واریانس  $\sigma_Z^2$ ) به شکل زیر محاسبه می گردند:

$$\mu_Z = E[Z] = \frac{1}{\sum_{j=1}^n l_j a_j} \left[ \sum_{j=1}^m k_j \mu_{Y_j} - \sum_{j=1}^n l_j \mu_{Q_j} \right] \quad (20)$$

$$\sigma_Z^2 = E[Z^2] - \mu_Z^2 = \frac{1}{\left( \sum_{j=1}^n l_j a_j \right)^2} \sum_{j=1}^m \sum_{t=1}^m k_j k_t \text{cov}(Y_j, Y_t) \quad (21)$$

که در آنها  $\mu_{Y_j}$  و  $\sigma_{Y_j}^2$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ) میانگین ها و واریانس های مؤلفه های  $Y$  بوده،  $E[c_i] = \mu_{Q_i}$  در اینجا فرض می گردند و  $\text{cov}(Y_j, Y_t)$  تابع کوواریانس مؤلفه های  $Y_j$  و  $Y_t$  می باشد.

قدم بعد در توصیف احتمالاتی متغیر غیرگوسی  $Z$ ، تعریف عباراتی برای بیان چولگی و کشیدگی آن (یعنی سومین و چهارمین رابطه مربوط به لنگرهای  $Z$ ) می باشند که مطابق زیر تعریف می گردند:

$$\gamma_{3Z} = \frac{E[(z - \mu_Z)^3]}{\sigma_Z^3} \quad (22)$$

$$\gamma_{4Z} = \frac{E[(z - \mu_Z)^4]}{\sigma_Z^4} \quad (23)$$

با استفاده از معادله (۲۱) می توان داشت:

$(N=4)$ ، استفاده از این عبارت منتهی به عبارت زیر میان  $Z$  و  $U$  خواهد شد [۸]:

$$Z = H(U) = \mu_Z + (\kappa \sigma_Z) [U + h_3 (U^2 - 1) + h_4 (U^3 - 3U)] \quad (15)$$

که در آن:

$$h_4 = (\sqrt{1+1.5(\gamma_{4Z}-3)}-1)/18 \text{ و } h_3 = \gamma_{3Z} / (4 + 2\sqrt{1+1.5(\gamma_{4Z}-3)})$$

بوده و در این روابط:

$\kappa = (1 + 2h_3^2 + 6h_4^2)^{-1/2}$  و  $\gamma_{nz} = E \left[ \left( \frac{Z - \mu_Z}{\sigma_Z} \right)^n \right]$  می باشند. این نکته بایستی تذکر داده شود که رابطه بالا زمانی معتبر خواهد بود که متغیر غیرگوسی  $Z$  دارای رفتار نرم باشد (یعنی توابع چگالی احتمال آنها دارای دُمهایی باشند که بیشتر از دُمهای متناظر در توزیع گوسی کشیده و امتداد یافته باشند به طوری که  $\gamma_{4Z} \geq 3$  باشد). با داشتن  $\gamma_{3Z}$  و  $\gamma_{4Z}$  (یعنی ضرائب چولگی و کشیدگی  $Z$ ) و بعد از آنها با معلوم بودن  $h_3$  و  $h_4$  در عبارت (۱۵)، دو تابع لازم  $f_{Z|A}(\cdot)$  و  $F_{Z|A}(\cdot)$  می توانند مطابق آنچه در ادامه می آید محاسبه گردند. با استفاده از رابطه میان  $Z$  و  $U$  (یعنی  $Z = H(U)$ ) که فرض می گردد یک به یک می باشد؛ برای  $Z = Z^*$  معلوم،  $U = u^*$  متناظر محاسبه می گردد. دو تابع یادشده بالا حال می توانند به شکل زیر به دست آیند:

$$F_{Z|A}(z^* | \mathbf{a}) = \Phi(u^*) \quad (16)$$

$$f_{Z|A}(z^* | \mathbf{a}) = \frac{1}{|H'(u^*)|} \phi(u^*) \quad (17)$$

که در آن:

$$H'(U) = \kappa [1 + 2h_3 U + 3h_4 (U^2 - 1)] \cdot \sigma_Z$$

$$\kappa = (1 + 2h_3^2 + 6h_4^2)^{-1/2}$$

در روابط بالا،  $\Phi(U)$  و  $\phi(U)$  تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی نرمال استاندارد  $U$  می باشند.

همان طور که اشاره شد روابط بالا تنها زمانی می توانند مورد استفاده قرار گیرند که متغیر  $Z$  غیرگوسی دارای رفتار نرم باشد. برای حالت های که رفتار  $Z$  سخت باشد (یعنی  $\gamma_{4Z} < 3$  است)، وینترشتاین روابط جایگزینی پیشنهاد کرده است که در اینجا بحث نمی شوند [۸]. قبلاً تذکر داده شد که محاسبه  $\mu_Z$  و  $\sigma_Z^2$ ، چولگی

$\gamma_{3Z}$  و کشیدگی  $\gamma_{4Z}$  زمانی که تابع  $Z = Z(Y)$  یک تابع عمومی باشد امری آسان نخواهد بود. در آنچه می آید این مقادیر در حالتی که  $Z = Z(Y)$  تابعی خطی است محاسبه می گردند. با داشتن چهار لنگر اول مشخصه های مقاومتی سازه  $Y_i (i=1, 2, \dots, m)$  و نیز با فرض

**مثال ۱:** در این مثال هدف آن است که نشان داده شود چگونه رابطه غیرخطی میان  $Z$  و  $Y$  (یک اسکالر که مشخصه مقاومتی سازه را نشان می‌دهد) ممکن است بر کیفیت توابع  $f_{Z|A}(\cdot)$  و  $F_{Z|A}(\cdot)$  تأثیر بگذارد و نیز چگونه تقریب این توابع با توزیع گوسی (با استفاده از تنها دو لنگر  $\mu_Z$  و  $\sigma_Z$ ) ممکن است به نتایج بی‌کیفیت منجر شود. برای این منظور، فرض کنید جهت  $A=a$  در فضای بارگذاری شبیه‌سازی شده باشد. همچنین فرض کنید یک نقطه شعاعی  $Z = z^*$  در نظر گرفته شود که در محل آنها مقادیر  $f_{Z|A}(z^* | a)$  و  $F_{Z|A}(z^* | a)$  مطلوب باشد. در این مثال، عبارت مرتبه سوم برای تعریف رابطه میان  $Z$  و  $Y$  فرض مسئله می‌باشد.

$$Z = Z(Y) = aY^3 + bY^2 + cY + d \quad (28)$$

برای سادگی، ضرائب  $a, b, c, d$  همگی فرض می‌شود واحد می‌باشند و نیز تنها جهت نمایش مطالب در این مثال  $Y$  فرض می‌شود که دارای توزیع نرمال با میانگین و واریانس  $0.0$  و  $1.0$  به ترتیب می‌باشد. در اشکال (۳) و (۴) نتایج به‌دست آمده برای توابع  $f_{Z|A}(z^* | a)$  و  $F_{Z|A}(z^* | a)$  برای مقادیر مختلف  $Z = z^*$  نمایش داده شده‌اند. در همین اشکال دو حالت لحاظ شده‌اند؛ یعنی:

- ۱- مقادیر دقیق برای این توابع با استفاده از تئوری احتمالات که در روابط (۱۳) و (۱۴) توصیف شده‌اند،
- ۲- تقریب لنگر دوم<sup>۱</sup> (SMA) که  $f_{Z|A}(\cdot)$  به‌عنوان توزیع نرمال گرفته خواهد شد و دو لنگر  $\mu_Z$  و  $\sigma_Z$  با استفاده از روابط (۸) و (۹) استخراج می‌گردند. همان‌طور که در شکل‌ها ملاحظه می‌شود، با وجود ارائه نتایج خوب توسط SMA برای بعضی از مقادیر  $Z = z^*$ ، در حالت‌های دیگر نتایج غیرقابل قبولی به‌دست می‌آیند. به‌عنوان گام بعدی، به‌منظور نشان دادن اثر تخمین‌های بالا در آنالیز واقعی قابلیت اعتماد سازه‌ای، سازه قاب صلب- پلاستیک ارائه شده در مرجع [۱] در نظر گرفته می‌شود (شکل (۵)). بر روی این سازه، سه بار وابسته به زمان  $Q_1(t), Q_2(t)$  و  $Q_3(t)$  که فرض می‌گردند فرآیندهای گوسی ایستا بوده و با بردار میانگین و ماتریس کوواریانس زیر توصیف می‌شوند، اثر می‌کنند.

$$\mu_Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C_Q(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} 0.25p(t_1 - t_2) & 0.125p(t_1 - t_2) & 0 \\ 0.125p(t_1 - t_2) & 0.25p(t_1 - t_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0.25p[2(t_1 - t_2)] \end{bmatrix}$$

$$\gamma_{3z} = \frac{\sum_i \sum_j \sum_t k_i k_j k_t E \left\{ (y_i - \mu_{y_i})(y_j - \mu_{y_j})(y_t - \mu_{y_t}) \right\}}{\left[ \sum_j \sum_t k_j k_t \text{cov}(y_j, y_t) \right]^{3/2}} \quad (24)$$

و به‌طور مشابه می‌توان یافت که:

$$\gamma_{4z} = \frac{\sum_i \sum_j \sum_t \sum_s k_i k_j k_t k_s E \left\{ (y_i - \mu_{y_i})(y_j - \mu_{y_j})(y_t - \mu_{y_t})(y_s - \mu_{y_s}) \right\}}{\left[ \sum_j \sum_t k_j k_t \text{cov}(y_j, y_t) \right]^2} \quad (25)$$

تذکر آنکه محاسبه  $\gamma_{3z}$  و  $\gamma_{4z}$  با استفاده از روابط بالا در حالت کلی آسان نیست. با این وجود، حالت‌های خاصی وجود دارند که روابط بالا می‌توانند ساده شوند. برای مثال اگر فرض گردد که تمامی متغیرهای مقاومتی سازه یعنی  $Y_i$  متغیرهای مستقل می‌باشند محاسبه  $\gamma_{3z}$  و  $\gamma_{4z}$  به محاسبه روابط بسیار ساده‌تری کاهش می‌یابد [۱۳]. به‌عنوان یک نکته تکمیلی در این بخش این مطلب بایستی ذکر گردد که در حالت کلی که مسئله دارای  $k$  تابع حالت حدی می‌باشد، واضح است که مسئله دارای  $k$  مجموعه توابع  $f_{Z|A}(\cdot)$  و  $F_{Z|A}(\cdot)$  برای هر جهت شبیه‌سازی شده  $A=a$  می‌باشد. روشن است که برای یک جهت معلوم  $A=a$  و یک  $Z = z^*$  معلوم، بحرانی‌ترین مقادیر این توابع بایستی مورد استفاده قرار گیرند. برای تحقق این منظور، ملچر پیشنهاد کرده است که  $F_{Z|A}(\cdot)$  مؤثر با استفاده از پوش تمامی مؤلفه‌های  $F_{Z_i|A}(\cdot)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) مربوط به هر یک از توابع حالت حدی  $G_i[\cdot] = 0$  به نحوی به‌دست آید که عرض آن ماکزیمم در شعاع  $Z = z^*$  شود [۱]. یعنی:

$$F_{Z|A}(\cdot) = \text{SUP}_{i,s} [F_{Z_i|A}(\cdot)] \quad (26)$$

و بنابراین، فاصله برای همه  $j \neq i$ :

$$f_{Z|A}(\cdot) = [f_{Z_i|A}(\cdot)]_{F_{Z_i|A} > F_{Z_j|A}} \quad (27)$$

در اینجا روش یادشده مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

#### ۴. مثال‌ها

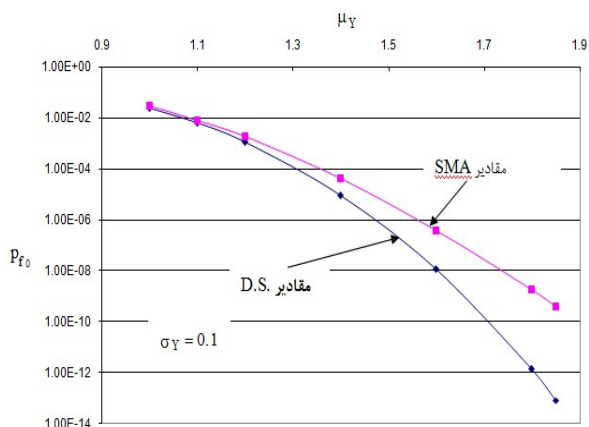
در بخش ۳، دو کلاس از مسائلی که ممکن است در مسائل قابلیت اعتماد وجود داشته باشند، بحث شدند. در این بخش این دو کلاس در مثال‌هایی خواهند آمد و کیفیت مسئله ساده‌سازی شده با استفاده از تنها دو لنگر اول مورد تفحص و کنکاش قرار خواهد گرفت.

<sup>1</sup> Second Moment Approximation (SMA)

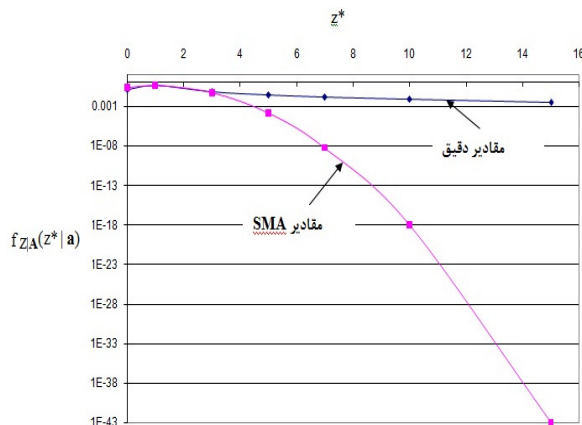
در این عبارات  $g(Y)$  یک تابع مرتبه سوم شبیه آنچه در عبارت (۲۸) داده شد، می باشد و  $Y$  نیز مانند آنچه قبلاً بحث شد یک متغیر تصادفی با توزیع نرمال در نظر گرفته خواهد شد. بر اساس مباحث مطروح شده پیرامون عبارت (۲)، نقطه تقاطع میان شعاع شبیه سازی شده  $A=a$  و هر یک از توابع حالت ها حدی با رابطه  $r_i = za_i + c_i$  نشان داده می شود. با جایگزینی این رابطه در توابع حالت های حدی (۲۹) روابط زیر حاصل خواهند شد:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{4g(Y) - \mu_{Q_1}}{a_1} \\ Z_2 &= \frac{4g(Y) - \mu_{Q_2}}{a_2} \\ Z_3 &= \frac{6g(Y) - \mu_{Q_3}}{a_3} \\ Z_4 &= \frac{8g(Y) - \mu_{Q_1} - \mu_{Q_3}}{a_1 + a_3} \end{aligned} \quad (30)$$

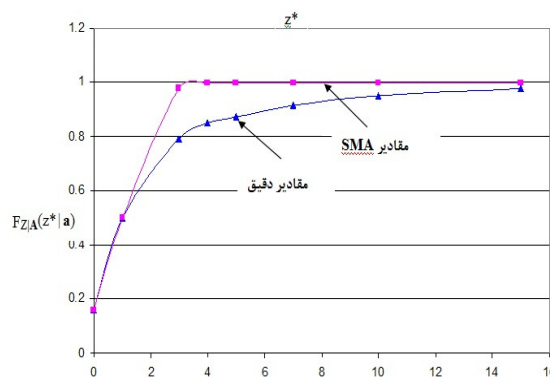
عبارات بالا می توانند برای ارزیابی توابع  $f_{Z_i|A}(\cdot)$  و  $F_{Z_i|A}(\cdot)$  ( $i=1,2,3,4$ ) مورد استفاده قرار گیرند. تذکر آنکه نقطه  $c$  در عبارات (۶) و (۷) نقطه میانگین بارها  $\mu_Q$  در نظر گرفته می شود. در شکل های (۶) تا (۹)، دو مجموعه از نتایج با استفاده از روش های DS (شبیه سازی جهتی<sup>۱</sup> و SMA (تقریب لنگر دوم)) برای  $P_f$  و  $\nu_D^+ / \sqrt{-\rho''(0)}$  برای مقادیر مختلف  $\mu_Y$  (با فرض  $\sigma_Y = 0.1$ ) و برای مقادیر مختلف  $\sigma_Y$  (با فرض  $\mu_Y = 1.8$ ) به ترتیب ارائه شده اند. در این اشکال،  $\rho''(0) = \partial^2 \rho / \partial t_1 \partial t_2$  با فرض  $t_1 - t_2 = 0$  می باشد. همان طور که نشان داده شده است، فاصله میان نتایج در بعضی از حالت های می تواند عمده باشد.



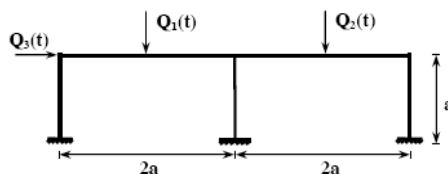
شکل ۶. احتمال خرابی اولیه به ازاء مقادیر مختلف  $\mu_Y$  زمانی که  $Z = Z(Y)$  یک تابع چند جمله ای مرتبه سوم است.



شکل ۳.  $f_{Z_1A}(z^* | a)$  برحسب  $Z^*$  که  $Z=Z(Y)$  یک تابع چند جمله ای مرتبه سوم می باشد.



شکل ۴.  $F_{Z_1A}(z^* | a)$  برحسب  $Z^*$  که  $Z=Z(Y)$  یک تابع چند جمله ای مرتبه سوم می باشد.



شکل ۵. قاب تعریف شده در مثال ها

که در آنها  $\rho(t_1 - t_2)$  تابع همبستگی با نقاط زمانی  $t_1$  و  $t_2$  می باشد. در اینجا  $\rho(t_1 - t_2)$  با جزئیات بیشتر بحث نخواهد شد. توابع حالت های حدی مسئله حاضر به شکل زیر لحاظ می گردند:

$$\begin{aligned} G_1[\mathbf{Y}, \mathbf{Q}] &= 4g(Y) - Q_1(t) = 0.0 \\ G_2[\mathbf{Y}, \mathbf{Q}] &= 4g(Y) - Q_2(t) = 0.0 \\ G_3[\mathbf{Y}, \mathbf{Q}] &= 6g(Y) - Q_3(t) = 0.0 \\ G_4[\mathbf{Y}, \mathbf{Q}] &= 8g(Y) - Q_1(t) - Q_3(t) = 0.0 \end{aligned} \quad (29)$$

<sup>1</sup> Directional Simulation

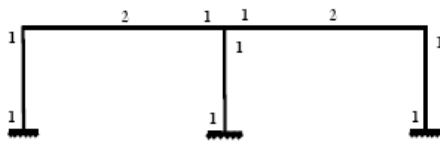


در خصوص نتایج بالا نکات ذیل از اهمیت برخوردار می‌باشند:

۱- کیفیت  $f_{Z|A}(\cdot)$  نشان داده شده به وسیله SMA بسیار وابسته به محل  $\mu_Y$  که در آن خطی‌سازی تابع مرتبه سوم بالا  $Z = Z(Y)$  انجام می‌شود و نیز به‌طور واضح وابسته به شکل منحنی  $Z(Y)$  می‌باشد. اگر خط حاصل از خطی‌سازی فاصله قابل توجهی از منحنی دقیق برای نقطه خاص  $Z = z^*$  داشته باشد، به‌طور طبیعی فاصله میان دو مجموعه نتایج برای توابع  $f_{Z|A}(\cdot)$  و  $F_{Z|A}(\cdot)$  انتظار می‌رود که قابل توجه باشد.

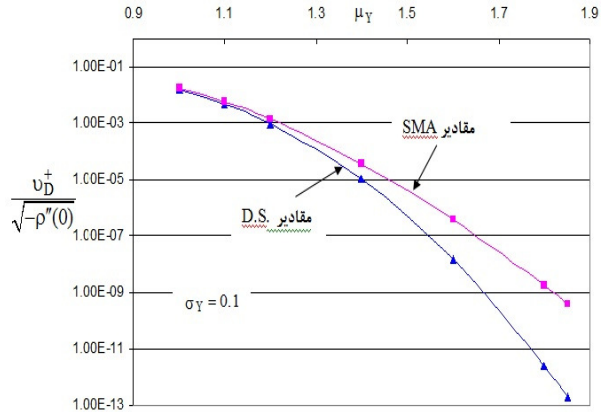
۲- از آنجایی که محاسبه  $P_{f0}$  و  $\nu_D^+$  مستلزم دخالت مقادیر تابع  $f_Q(\cdot)$  نیز در هر جهت شبیه‌سازی شده  $A=a$  می‌باشد (معادلات (۶) و (۷) ملاحظه گردند)، آن توابع  $f_{Z|A}(\cdot)$  و  $F_{Z|A}(\cdot)$  در مقادیر  $\nu_D^+$  و  $P_{f0}$  در امتداد این جهت مؤثرتر هستند که متناظر مقادیر  $f_Q(\cdot)$  بزرگ‌تری باشند. این به آن معناست که ممکن است اختلاف قابل توجهی میان مقادیر  $f_{Z|A}(\cdot)$  و  $F_{Z|A}(\cdot)$  در روش‌های دقیق و تقریبی باشد، اما این اختلاف بزرگ در مناطقی اتفاق افتد که  $f_Q(\cdot)$  قابل توجه نباشد و بنابراین مقادیر  $\nu_D^+$  و  $P_{f0}$  منتهجه اختلاف قابل ملاحظه‌ای در این جهت نداشته باشند.

**مثال ۲:** در این مثال، مجدداً همان قاب صلب-پلاستیک مورد بحث در مثال ۱ مورد نظر گرفته خواهد شد اما در اینجا دو متغیر تصادفی مقاومت سازه‌ای (مقاومت متناظر مفصل‌های پلاستیک) یعنی  $Y_1$  و  $Y_2$  (متناظر محل‌هایی که در شکل (۱۰) نشان داده شده‌اند) وجود خواهند داشت که لزوماً مستقل از یکدیگر هم نخواهند بود. در این مثال فرض می‌شود  $Y_1$  و  $Y_2$  دارای توزیع نرمال می‌باشند. همچنین توابع حالت‌های حدی همان‌ها که در عبارت (۲۹) داده شده‌اند در نظر گرفته خواهند شد اما در اینجا  $g(Y)$  تابعی خطی لحاظ خواهد گشت (یعنی  $g(Y) = ay_1 + by_2$  که برای سادگی  $a = b = 1.0$  در نظر گرفته می‌شوند).

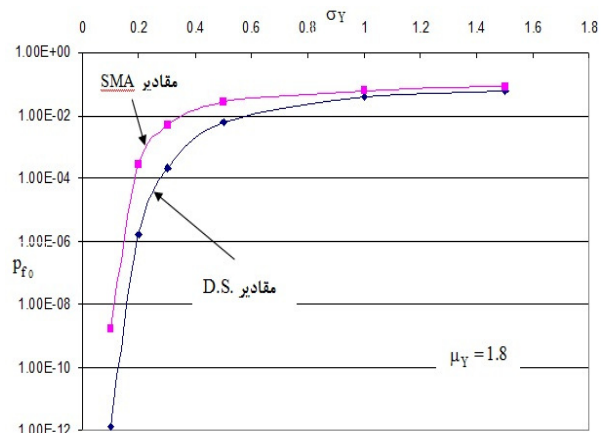


شکل ۱۰. نمایش محل‌های مختلف قاب با مقاومت‌های مختلف در مثال‌های ۲ تا ۴

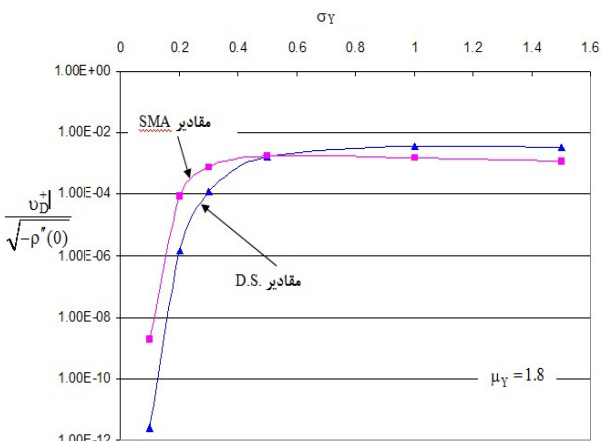
با داشتن حالت‌های حدی بالا، توابع مربوطه  $f_{Z|A}(\cdot)$  و  $F_{Z|A}(\cdot)$  با روش‌های زیر محاسبه خواهند شد:



شکل ۷. نرخ برون‌گذاری به‌عنوان تابعی از  $\mu_Y$  در حالی که  $Z = Z(Y)$  یک تابع چندجمله‌ای مرتبه سوم است.



شکل ۸. احتمال خرابی اولیه به‌ازاء مقادیر مختلف  $\sigma_Y$  در حالی که  $Z = Z(Y)$  یک تابع چندجمله‌ای مرتبه سوم است.



شکل ۹. نرخ برون‌گذاری مقابل  $\sigma_Y$  در حالی که  $Z = Z(Y)$  یک تابع چند جمله‌ای مرتبه سوم است.

مجدداً شبیه مثال ۱، مقادیر  $f_{Z|A}(z^* | \mathbf{a})$  و  $F_{Z|A}(z^* | \mathbf{a})$  به‌عنوان توابعی از  $z^*$  ابتدا نمایش داده خواهند شد (جدول ۲) و سپس تأثیر این مقادیر در کمیت‌های  $p_{f_0}$  و  $v_D^+$  که از آنالیز قابلیت اعتماد منتج شده‌اند ارائه خواهند شد (جدول ۳).

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، به‌علت غیرخطی بودن نسبی بالای تابع  $g(\mathbf{Y})$ ، شکاف قابل توجهی میان نتایج به دست آمده از روش‌های DS و FORM، همان‌گونه که انتظار نیز می‌رفت، دیده می‌شود. علاوه بر این تفاوت‌های بسیار بیشتر میان این دو سری مجموعه نتایج و نتایج به‌دست آمده از به‌کار رفتن SMA ملاحظه می‌شود که نشان می‌دهد چگونه این تقریب می‌تواند به نتایج بسیار خطاآمیزی زمانی که  $g(\mathbf{Y})$  حالتی بسیار غیرخطی داشته باشد، منتهی گردد.

الف) با استفاده از روش شبیه‌سازی جهتی (DS)  
 ب) با استفاده از روش قابلیت اعتماد مرتبه اول (FORM)  
 ج) با استفاده از روش تقریب لنگر دوم (SMA)  
 نتایج به‌دست آمده از به‌کارگیری سه روش بالا برای مقادیر مختلف  $z^*$  و نیز با فرض فضای دو بعدی  $Y$  به شکل فضای نرمال استاندارد در جدول (۱) نمایش داده شده‌اند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود از آنجایی که  $g(\mathbf{Y})$  تابعی خطی می‌باشد همان‌طور که انتظار می‌رود نتایج یکسانی برای دو تابع  $f_{Z|A}(\cdot)$  و  $F_{Z|A}(\cdot)$  در هر سه حالت بالا حاصل می‌گردد. همچنین انتظار می‌رود نتایج واحدی در آنالیز قابلیت اعتماد برای سه حالت یاد شده به دست آیند.

مثال ۳: در این مثال همان سازه و همان اطلاعات ارائه شده در مثال ۲ مورد استفاده قرار خواهند گرفت، اما با این تفاوت که در اینجا تابع غیرخطی  $g(\mathbf{Y}) = aY_1 + bY_2^2$  (ضرائب  $\mathbf{a}$  و  $\mathbf{b}$  در اینجا واحد لحاظ خواهند شد) به‌کار گرفته خواهد شد.

جدول ۱. مقادیر  $f_{Z|A}(z^* | \mathbf{a})$  و  $F_{Z|A}(z^* | \mathbf{a})$  به‌عنوان توابعی از  $z^*$  در حالتی که  $g(\mathbf{Y}) = y_1 + y_2$  و فرض توزیع نرمال برای مؤلفه‌های  $\mathbf{Y}$

$z^*$	$f_{Z A}(z^*   \mathbf{a})$	$f_{Z A}(z^*   \mathbf{a})$	$f_{Z A}(z^*   \mathbf{a})$
	$F_{Z A}(z^*   \mathbf{a})$ روش DS	$F_{Z A}(z^*   \mathbf{a})$ FORM	$F_{Z A}(z^*   \mathbf{a})$ روش SMA
1.0	0.2212 0.7424	0.2197 0.7603	0.2197 0.7603
3.0	2.9770E-2 0.9803	2.9732E-2 0.9831	2.9732E-2 0.9831
5.0	5.4280E-4 0.99974	5.4457E-4 0.99980	5.4457E-4 0.99980

جدول ۲. مقادیر  $f_{Z|A}(z^* | \mathbf{a})$  و  $F_{Z|A}(z^* | \mathbf{a})$  به‌عنوان توابعی از  $z^*$  در حالت تابع غیرخطی  $g(\mathbf{Y}) = Y_1 + Y_2^2$

$z^*$	$f_{Z A}(z^*   \mathbf{a})$	$f_{Z A}(z^*   \mathbf{a})$	$f_{Z A}(z^*   \mathbf{a})$
	$F_{Z A}(z^*   \mathbf{a})$ روش DS	$F_{Z A}(z^*   \mathbf{a})$ FORM	$F_{Z A}(z^*   \mathbf{a})$ روش SMA
1.0	0.2738 0.5769	0.1583 0.8067	0.2419 0.8413
3.0	6.9115E-2 0.8959	3.0412E-2 0.9513	4.4318E-3 0.9986
5.0	1.7206E-2 0.9697	8.5130E-3 0.9853	1.4867E-6 0.9999
6.0	9.6376E-3 0.9831	4.6930E-3 0.9918	6.0758E-9 1.0

جدول ۳. مقادیر  $p_{f0}$  و  $v_D^+$  به‌عنوان تابعی از  $\mu_Y$  در حالت تابع غیرخطی  $g(\mathbf{Y}) = Y_1 + Y_2^2$

$\mu_Y$	$P_{f0}$ $v_D^+ / \sqrt{-\rho''(0)}$ روش DS	$P_{f0}$ $v_D^+ / \sqrt{-\rho''(0)}$ روش FORM	$P_{f0}$ $v_D^+ / \sqrt{-\rho''(0)}$ روش SMA
[0.5] [0.5]	0.1884 0.6479E-2	0.2873 0.1249E-1	0.5488 0.2148E-1
[0.6] [0.6]	0.1302 0.5410E-2	0.2282 0.1064E-1	0.4449 0.1684E-1
[0.7] [0.7]	0.1107 0.5185E-2	0.1744 0.8704E-2	0.3530 0.1282E-1
[0.8] [0.8]	0.8321E-1 0.4534E-2	0.1221 0.6452E-2	0.2609 0.8994E-2
[0.9] [0.9]	0.2850E-1 0.1531E-2	0.5647E-1 0.3049E-2	0.1305 0.4112E-2
[1.0] [1.0]	0.1166E-1 0.6863E-3	0.1557E-1 0.8821E-3	0.4721E-1 0.1418E-2

مثال ۴: در این مثال مجدداً همان قاب مورد بحث در مثال‌های پیشین مورد استفاده قرار خواهد گرفت، اما در اینجا تابع  $Z = Z(\mathbf{Y})$  به‌عنوان یک تابع خطی (یعنی  $Z = aY_1 + bY_2$ ) در نظر گرفته خواهد شد. همچنین به‌منظور مقایسه نتایج مدل لنگر هرمیت (HMM) با نتایج حاصل از روش DS، دو متغیر تصادفی  $Y_1$  و  $Y_2$  مستقل (به‌طوری‌که  $f_Y(\mathbf{y}) = f_{y_1}(y_1) \cdot f_{y_2}(y_2)$ ) و به‌ترتیب دارای توزیع نمایی و لوگ نرمال فرض می‌شوند. آنالیزهای مختلفی به‌ازاء مقادیر مختلف  $\mu_{Y_1}$  و  $\mu_{Y_2}$  و برای سه حالت  $\sigma_{Y_2} = 1.0$ ،  $\sigma_{Y_2} = 0.5$  و  $\sigma_{Y_2} = 0.1$  انجام می‌شوند. در همه حالت‌ها  $a = b = 1.0$  در نظر گرفته خواهند شد. نتایج حاصل در جدول‌های (۴) تا (۶) نشان داده شده‌اند. از این جدول‌ها مشاهده می‌شود که روش SMA تقریباً همیشه  $p_{f0}$  و  $v_D^+$  را دست بالا به دست می‌دهد. همچنین مشاهده می‌شود که نتایج به‌دست آمده از کاربرد روش HMM همیشه بهتر از نتایج حاصل از SMA نبوده و گاهی نتایج ضعیف‌تری را نیز به‌دست می‌دهد.

جدول ۴. مقادیر  $p_{f0}$  و  $v_D^+$  به‌عنوان تابعی از  $\mu_Y$  در حالت  $\sigma_{Y_2} = 1.0$ ، تابع خطی  $Z = Z(\mathbf{Y})$ ، توابع نمایی  $f_{Y_1}(y_1)$  و لوگ نرمال  $f_{Y_2}(y_2)$

$\mu_Y$	$P_{f0}$ $v_D^+ / \sqrt{-\rho''(0)}$ روش DS	$P_{f0}$ $v_D^+ / \sqrt{-\rho''(0)}$ روش SMA	$P_{f0}$ $v_D^+ / \sqrt{-\rho''(0)}$ روش HMM
[0.1] [1.0]	0.1622 0.2983E-1	0.2662 0.1942E-1	0.3761E-1 0.3031E-2
[0.1] [1.5]	0.1660E-1 0.4281E-2	0.7175E-1 0.6505E-2	0.1713E-1 0.1601E-2
[0.1] [2.0]	0.1151E-3 0.3432E-4	0.4316E-2 0.4643E-3	0.1300E-2 0.1241E-3

جدول ۵. مقادیر  $P_{f0}$  و  $v_D^+$  به‌عنوان توابعی از  $\mu_Y$  در حالت  $\sigma_{y_2} = 0.5$ ، تابع خطی  $Z = Z(Y)$ ، توابع نمایی  $f_{y_1}(y_1)$  و لوگ نرمال  $f_{y_2}(y_2)$

$\mu_Y$	$P_{f0}$	$P_{f0}$	$P_{f0}$
	$v_D^+ / \sqrt{-\rho^*(0)}$ روش DS	$v_D^+ / \sqrt{-\rho^*(0)}$ روش SMA	$v_D^+ / \sqrt{-\rho^*(0)}$ روش HMM
[0.1 1.0]	0.3098E-1 0.1211E-1	0.8397E-1 0.1690E-1	0.2856E-1 0.6766E-2
[0.1 1.5]	0.1276E-3 0.7004E-4	0.5051E-2 0.1383E-2	0.2015E-2 0.5043E-3
[0.1 2.0]	0.3843E-8 0.2393E-8	0.4971E-5 0.1557E-5	0.2125E-5 0.5965E-6
[0.1 2.1]	0.1383E-9 0.8933E-10	0.7554E-7 0.2886E-7	0.3056E-7 0.8892E-8

اینجا  $f_y$ ،  $b$  و  $h$  (مقاومت تسلیم فولاد، به‌ترتیب عرض و ارتفاع سطح مقطع تیر) متغیرهای تصادفی لحاظ خواهند شد و نیز  $Q_1(t)$  و  $Q_2(t)$  دو فرآیند استوکستیک به‌حساب خواهند آمد. مشخصات احتمالاتی این متغیرهای تصادفی/فرآیندهای استوکستیک در جدول (۷) خلاصه شده‌اند.

مثال ۵: در این مثال یک تیر ساده فولادی خمشی با مقطع مربع مستطیلی در نظر گرفته می‌شود. این تیر در معرض اعمال دو بار  $Q_1(t)$  و  $Q_2(t)$  در وسط دهانه خود قرار دارد (شکل (۱۱)). همچنین این تیر تحت اثر وزن خود قرار دارد. فرض می‌شود که چگالی وزنی مصالح تیر به مقدار  $\rho_{st} = 78500 \frac{N}{m^3}$  باشد. در

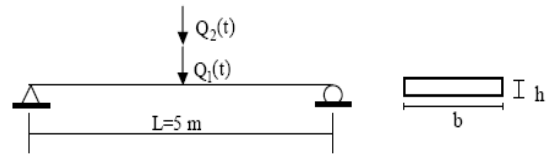
جدول ۶. مقادیر  $P_{f0}$  و  $v_D^+$  به‌عنوان توابعی از  $\mu_Y$  در حالت  $\sigma_{y_2} = 0.1$ ، تابع خطی  $Z = Z(Y)$ ، توابع نمایی  $f_{y_1}(y_1)$  و لوگ نرمال  $f_{y_2}(y_2)$

$\mu_Y$	$P_{f0}$	$P_{f0}$	$P_{f0}$
	$v_D^+ / \sqrt{-\rho^*(0)}$ روش DS	$v_D^+ / \sqrt{-\rho^*(0)}$ روش SMA	$v_D^+ / \sqrt{-\rho^*(0)}$ روش HMM
[0.1 1.0]	0.2856E-6 0.3981E-6	0.3125E-5 0.3323E-5	0.2059E-5 0.1755E-5
[0.1 1.2]	0.1415E-9 0.2340E-9	0.1657E-8 0.1784E-8	0.1190E-8 0.9728E-9
[0.1 1.4]	0.8670E-13 0.1592E-13	0.1050E-12 0.1156E-12	0.8062E-13 0.6524E-13
[0.1 1.5]	0.4363E-16 0.8516E-16	0.3354E-15 0.3724E-15	0.2641E-15 0.2130E-15

جدول ۷. مشخصات احتمالاتی پارامترهای موجود در مثال ۵

پارامتر	نوع توزیع	میانگین	انحراف معیار
$f_y (Y_1)$	لوگ نرمال	240 Mpa	24 Mpa
$b(Y_2)$	لوگ نرمال	0.2 m	0.01 m
$h(Y_3)$	لوگ نرمال	0.04 m	0.004 m
$Q_1(t)$	گوسی	3500 N	4.9E5p(τ)
$Q_2(t)$	گوسی	$\mu_{Q_2}$	$\sigma_{Q_2}^2, \rho(\tau)$

کمیت  $\sigma_{Q_2}$  به این منظور این عدد انتخاب شده است تا از خوبی و تناسب شکل فضای بارگذاری که در آن شبیه‌سازی جهتی به‌طور معمول انجام می‌شود، تعمداً کاسته گردد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود برای مقادیر کوچک  $\mu_{Q_2}$  فاصله میان نتایج به‌دست آمده از دو روش قابل توجه می‌باشد. با این وجود، این فاصله زمانی که  $\mu_{Q_2}$  افزایش می‌یابد کاسته می‌گردد. در جدول (۹) مقادیر  $p_{f0}$  و  $v_D^+$  در مقابل مقدار  $\sigma_{Q_2}$  در حالتی که  $\mu_{Q_2} = 0.0$  در نظر گرفته شده است نشان داده شده‌اند. روشن است که برای مقادیر کوچک  $\sigma_{Q_2}$ ، تعداد لازم شبیه‌سازی‌های جهتی زمانی که شبیه‌سازی جهتی ساده (نه با استفاده از شبیه‌سازی با استفاده از نمونه‌گیری مهم) انجام می‌شود مقداری بزرگ خواهد بود. همان‌طور که نشان داده شده است  $p_{f0}$  و  $v_D^+$  خیلی حساس به مقادیر  $\sigma_{Q_2}$  در هر دو حالت استفاده از روش‌های SMA، DS نمی‌باشند. اما اختلاف میان نتایج دو روش قابل ملاحظه می‌باشد و نشانگر آن است که خطی‌سازی تابع  $g(\mathbf{Y}) = g(f_y, b, h)$  در محل میانگین مؤلفه‌های  $Y$  تأثیر به‌سزایی روی نتایج دارد. ذکر این نکته جالب است که آنالیز قابلیت اعتماد برای تیر بالا قبلاً توسط Andrieu-Renaud و همکارانش انجام شده است [۱۱]، البته به‌گونه‌ای که بار  $Q_2(t)$  وجود نداشته است (در اینجا این آنالیز به‌نحوی لحاظ خواهد شد که  $\mu_{Q_2}$  و  $\sigma_{Q_2}$  به سمت صفر میل نمایند). در این تحقیق  $2.87 \times 10^{-6}$  گزارش شده است که فاصله چندانی با آنچه در اینجا به‌دست آمده است ندارد.



شکل ۱۱. تیر ساده و سطح مقطع آن در مثال ۵

بارهای  $Q_1(t)$  و  $Q_2(t)$  دو فرایند گوسی ایستای مستقل با میانگین و انحراف معیار نقل شده در جدول (۷) در نظر گرفته خواهند شد. یادآوری می‌شود که  $\rho(\tau)$  تابع خود هم‌بستگی بوده که در آن  $\tau = t_1 - t_2$  و  $t_1$  و  $t_2$  نقاط زمانی می‌باشند. این تابع در اینجا با جزئیات بیشتر بحث نخواهد شد. این تیر فرض می‌شود با تشکیل مفصل پلاستیک در وسط آن ناشی از اعمال بارها خراب می‌شود. بنابراین تابع حالت حدی مربوطه به شکل زیر می‌تواند نوشته شود.

$$G[\mathbf{Q}, \mathbf{Y}] = \frac{Y_2 Y_3^2 Y_1}{4} - \left[ \frac{(Q_1 + Q_2)L}{4} + \frac{p_{st} Y_2 Y_3 L^2}{8} \right] \quad (۳۱)$$

همان‌طور که دیده می‌شود در این مثال مؤلفه‌های  $Y$  (یعنی  $f_y$ ،  $b$  و  $h$ ) غیرنرمال بوده و نیز تابع حالت حدی بر حسب این مؤلفه‌ها غیر خطی می‌باشد. آنالیز قابلیت اعتماد از روش‌های SMA و DS برای مقادیر مختلف  $\mu_{Q_2}$  و  $\sigma_{Q_2}$  انجام شده است. در جدول (۸) مقادیر  $p_{f0}$  و  $v_D^+$  بر حسب  $\mu_{Q_2}$  با فرض  $\sigma_{Q_2} = 700N$  نشان داده شده‌اند.

جدول ۸.  $p_{f0}$  و  $v_D^+$  به‌عنوان تابعی از  $\mu_{Q_2}$  در حالتی که  $\sigma_{Q_2} = 700N$

$\mu_{Q_2}$	$p_{f0}$	$p_{f0}$
	$v_D^+ / \sqrt{-\rho^*(0)}$ روش DS	$v_D^+ / \sqrt{-\rho^*(0)}$ روش SMA
0.0	0.7830E-5 0.6599E-5	0.1027E-2 0.3541E-3
1000	0.1011E-3 0.1025E-3	0.2285E-2 0.7064E-3
2000	0.8414E-3 0.6819E-3	0.4626E-2 0.1256E-2
3000	0.3901E-2 0.4687E-2	0.9145E-2 0.2183E-2
3500	0.7886E-2 0.6095E-2	0.1242E-1 0.2764E-2
4000	0.1338E-1 0.1631E-1	0.1646E-1 0.3396E-2

ب) اگر  $f_Y(y)$  قابل دسترسی نباشد و قرار باشد که تنها از چند لنگر مؤلفه‌های  $Y$  استفاده شود، وضعیت‌های مختلفی از قرار ذیل وجود خواهند داشت:

ب-۱) اگر  $Z = Z(Y)$  یک تابع غیرخطی عمومی باشد و اگر تعداد مؤلفه‌های  $Y$  کوچک نبوده و نیز این مؤلفه‌ها مستقل نباشند، در این‌گونه وضعیتی تعداد زیادی از لنگرهای مؤلفه‌های  $Y$  مورد نیاز خواهند بود که استفاده از مدل لنگر هر میت را غیر ممکن می‌سازند.

ب-۲) اگر تابع  $Z = Z(Y)$  خطی باشد (یعنی  $Z = \sum_i^m a_i Y_i$ ) با ضرایب ثابت  $a_i$ ) اما مؤلفه‌های  $Y$  ضرورتاً مستقل نباشند، در این شرایط نیز همچنان، تعداد نسبتاً زیادی لنگر نیاز خواهد شد. برای مثال اگر  $m$  فقط عدد ۳ باشد (یعنی  $Y = Y(Y_1, Y_2, Y_3)$ )، برای محاسبه لنگرهای  $\mu_{201}$ ،  $\mu_{102}$ ،  $\mu_{012}$  و  $\mu_{021}$ ،  $\mu_{030}$ ،  $\mu_{003}$ ،  $\mu_{111}$ ،  $\mu_{210}$ ،  $\mu_{120}$  برای محاسبه ضریب چولگی  $\gamma_{3Z}$  و کل لنگرهای  $\mu_{301}$ ،  $\mu_{103}$ ،  $\mu_{013}$ ،  $\mu_{031}$ ،  $\mu_{004}$ ،  $\mu_{040}$ ،  $\mu_{400}$ ،  $\mu_{112}$ ،  $\mu_{121}$ ،  $\mu_{211}$ ،  $\mu_{310}$ ،  $\mu_{130}$  کشیدگی  $\gamma_{4Z}$  را در دسترس داشته باشیم. می‌توان تصور کرد که اگر  $m$  به طرف مقداری بزرگ میل نماید چقدر تعداد بزرگ‌تری از لنگرها به طور اجبار بایستی معلوم باشند.

ج) اگر تابع  $Z = Z(Y)$  خطی و مؤلفه‌های  $Y$  مستقل باشند لنگرهای متقاطع<sup>۱</sup> یا صفر هستند و یا به سادگی قابل محاسبه خواهند بود که خود-لنگرها<sup>۲</sup> هم البته در اینجا مورد نیاز می‌باشند. این شرایط مسئله را به مراتب ساده‌تر و قابل دنبال کردن می‌نماید. ذکر این نکته مهم است که در این حالت با بهره‌گیری از قضیه شناخته شده حدمرکزی، می‌توان انجام داد و نتیجه گرفت که توزیع  $Z$  به توزیع نرمال میل خواهد کرد (البته اگر  $m$  به اندازه کافی بزرگ باشد).

قضیه حد مرکزی می‌تواند حتی اگر توزیع هر یک از مؤلفه‌های  $Y_i$  نرمال نباشد نیز برقرار باشد. با استفاده از این قضیه تنها دو لنگر اول  $Z$  مورد نیاز می‌باشد که مسئله را به راه حل SMA کاهش می‌دهد. مبحث بالا و نیز این واقعیت که نتایج HMM بهبود قابل توجهی را نسبت به نتایج حاصله SMA نشان نمی‌دهند، بحث را به نتایج ذیل سوق می‌دهند:

- اگر  $f_Y(y)$  در دسترس باشد و  $Z = Z(Y)$  تابعی غیرخطی و عمومی باشد، یک راه مناسب جهت تخمین  $f_{Z|A}(\cdot)$  و  $f_{Z|A}(\cdot)$  استفاده از روش DS می‌باشد، حتی اگر HMM با عملیات محاسبات کمتری باشد.

جدول ۹.  $P_{f_0}$  و  $v_D^+$  به‌عنوان توابعی از  $\sigma_{Q_2}$  در حالی که  $\mu_{Q_2} = 0.0$

$\sigma_{Q_2}$	$P_{f_0}$	$P_{f_0}$
	$v_D^+ / \sqrt{-\rho^*(0)}$ DS Method	$v_D^+ / \sqrt{-\rho^*(0)}$ SMA Method
0.1	0.9164E-6 0.3925E-6	0.9499E-3 0.2447E-3
1.0	0.1070E-5 0.4289E-6	0.1224E-2 0.3148E-3
100	0.1063E-5 0.6023E-6	0.7825E-3 0.2023E-3
700	0.8112E-5 0.9138E-5	0.1027E-2 0.3541E-3

## ۵. نتایج و بحث

قابلیت کاربرد مدل لنگر هر میت در تخمین  $f_{Z|A}(\cdot)$  و

$$F_{Z|A}(\cdot)$$

برای کلاس دوم مسائلی که در بالا بحث شد، مدل لنگر هر میت (HMM) برای برقراری رابطه‌ای که یک متغیر غیرگوسی را به یک متغیر گوسی استاندارد ارتباط دهد مورد استفاده قرار گرفت. همان‌طور که قبلاً تذکر داده شد، روش‌های مختلف دیگری وجود دارند که تلاش در برقراری ارتباط مشابهی را دارند. این روش‌ها و دقت آنها مبحث مفصلی را در سوابق تحقیقاتی تشکیل داده است [۸، ۱۰-۱۲]. هر یک از این روش‌ها مزایا و معایب مختص به خود را دارا می‌باشند. در میان این روش‌ها، مدل لنگر هر میت در مقاله حاضر به علت بعضی خواص منحصر به فرد خود مورد استفاده قرار گرفت. البته این در حالی است که می‌توان در مباحث تحقیقات بیشتری روش‌های دیگر را نیز مورد آزمایش بیشتر قرار داد.

در اینجا بررسی نتایج به دست آمده توسط HMM و مقایسه آنها با نتایج ارائه شده توسط روش DS یا FORM و نیز روش SMA، نکاتی را آشکار می‌نماید که در ذیل به آنها پرداخته می‌شود:

الف) اگر تابع چگالی احتمال مشترک مؤلفه‌های  $Y$  یعنی  $f_Y(y)$  معلوم باشد، کاربرد HMM این مزیت را ایجاد می‌کند (نسبت به روش DS) که حجم محاسباتی بالا برای انجام شبیه‌سازی جهتی برای یافتن  $f_{Z|A}(\cdot)$  و  $F_{Z|A}(\cdot)$  حذف شده و تلاش محاسباتی برای استخراج لنگرهای لازم در مدل تمرکز خواهد یافت. تا زمانی که این لنگرها شامل خود-لنگرها و لنگرهای متقاطع (برای مثال  $\mu_{20}$ ،  $\mu_{30}$ ،  $\mu_{40}$ ،  $\mu_{21}$ ،  $\mu_{31}$ ،  $\mu_{22}$ ) معلوم باشند پارامترهای مرتبط با چهار لنگر اول یعنی  $\mu_Z$ ،  $\sigma_Z$ ،  $\gamma_{3Z}$  و  $\gamma_{4Z}$  می‌توانند محاسبه و پس از آن HMM می‌تواند بلادرنگ به کار گرفته شود.

<sup>1</sup> Cross-Moments

<sup>2</sup> Auto-Moments

استفاده از مدل لنگر هرمیت نیز مورد بحث قرار گرفت. در پایان نتیجه گرفته می‌شود که هرچند بعضی اوقات در این روش نتایج بهتری در مقایسه با روش SMA به دست می‌آید، اما متأسفانه هیچ تضمینی در ارائه همیشگی نتایج بهتر وجود ندارد و گاهی استفاده از این روش به نتایج حتی ضعیف‌تری نسبت به نتایج SMA منتهی می‌شود. بنابراین توصیه گردید که روش SMA تا زمانی که روش بهتری برای بهره‌برداری از لنگرهای بالاتر از لنگر دوم برای مدل کردن ( )  $f_{Z|A}$  وجود ندارد مورد استفاده قرار گیرد. در حالت کلی توصیه‌های زیر برای حالت‌های مختلف مسئله قابلیت اعتماد انجام می‌شوند:

۱- اگر مؤلفه‌های  $Y$  متغیرهای تصادفی غیرنرمال مستقل باشند و نیز تابع  $Z = Z(Y)$  غیرخطی باشد توابع  $f_{Z|A}(z^* | a)$  و

$F_{Z|A}(z^* | a)$  توصیه می‌شود که با استفاده از روش DS

محاسبه گردند. به منظور کاهش حجم عملیات محاسباتی روش FORM می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد اگر  $Z = Z(Y)$  به شکل ملایمی غیرخطی باشد. واضح است اگر  $Y$  تنها یک مؤلفه داشته باشد توابع یادشده به شکل دقیقی می‌توانند با استفاده از تئوری احتمالات محاسبه گردند.

۲- اگر  $Z = Z(Y)$  تابعی خطی باشد برای حالت‌های زیر روش SMA می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد:

الف) مؤلفه‌های  $Y$  متغیرهای تصادفی نرمال و در حالت کلی غیرمستقل باشند،

ب) مؤلفه‌های  $Y$  در حالت کلی متغیرهای تصادفی غیرنرمال و مستقل بوده و نیز تعداد آنها به اندازه کافی بزرگ باشد به طوری که قضیه شناخته شده حد مرکزی بتواند به کار گرفته شود.

ج) اگر  $f_Y(Y)$  در دسترس نباشد و تنها تعداد محدودی از خود- لنگرها و لنگرهای متقاطع مؤلفه‌های  $Y$  قابل دست‌یابی باشند. واضح است که این توصیه تا زمانی اعتبار دارد که مدل بهتری برای بهره‌برداری لنگرهای بالاتر از لنگر دوم برای تخمین  $f_{Z|A}(z^* | a)$  و  $F_{Z|A}(z^* | a)$  در دسترس نباشد.

۷. ضمیمه: محاسبه  $f_{Z|A}(z^* | a)$  و  $F_{Z|A}(z^* | a)$  با

### استفاده از شبیه‌سازی جهتی

محاسبه  $F_{Z|A}(z^* | a)$  با استفاده از شبیه‌سازی جهتی و برای حالتی که محل تابع حالت حدی ثابت باشد شناخته شده بوده و می‌تواند در جای دیگری ملاحظه گردد [۱]. این تابع می‌تواند از رابطه زیر به دست آید:

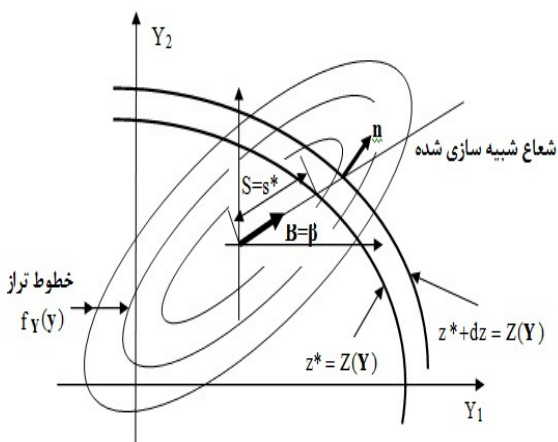
- اگر  $f_Y(y)$  به صورت بسته معلوم نباشد و دسترسی به چند لنگر مؤلفه‌های  $Y$  امکان‌پذیر باشد توصیه می‌شود که روش SMA برای کاهش حجم محاسبات لازم به کار گرفته شود. واضح است که در صورت استفاده از مدلی که نیازمند لنگرهای بیشتری از مؤلفه‌های  $Y$  باشد و نتایج بهتری را به دست می‌دهد، انجام حجم محاسبات بیشتر می‌تواند مفید باشد. دست‌یابی به این چنین مدلی می‌تواند موضوع تحقیقات بیشتر باشد.

### قابلیت کاربرد شبیه‌سازی جهتی برای ( ) $f_{Z|A}$ و ( ) $F_{Z|A}$ :

همان‌طور که قبلاً اشاره شده مهم‌ترین مزیت کار در فضای بارگذاری وجود فضائی با ابعاد کمتر نسبت به فضای کل متغیرهای درگیر در مسئله می‌باشد (یعنی  $n$  می‌تواند به مراتب کوچک‌تر از  $n+m$  باشد). در این مقاله به‌طور مشهود مشاهده شد که اگر  $Z = Z(Y)$  تابعی پیچیده باشد حجم محاسبات بالایی برای افزایش کیفیت محاسبه ( )  $f_{Z|A}$  و ( )  $F_{Z|A}$  بایستی صورت گیرد. این مطلب موضوعی است که می‌تواند قابلیت کاربرد و یا راندمان روش را به چالش بکشد. روشن است که روش‌های پیشنهادی بالا برای کار در فضای بارگذاری زمانی ارزشمند خواهند بود که حجم محاسبات لازم برای دسترسی به مجموعه‌ای از نتایج قابل قبول به مقدار قابل ملاحظه‌ای کمتر از حجم محاسباتی لازم برای کار در فضای کل متغیرها باشد. بنابراین سؤالی که مطرح خواهد بود این است که کدام فضا به حجم محاسبات کمتری نیاز دارد. پاسخ به این سؤال نیازمند به تحقیقات بیشتر بوده و در این مقاله مورد بحث قرار نخواهد گرفت.

### ۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله شبیه‌سازی جهتی در فضای بارگذاری به‌طور مختصر مرور شد. از آنجایی که محل‌های توابع حالت‌های حدی در این فضا ثابت نمی‌باشند (یعنی متغیر تصادفی هستند)، این محل‌ها باید تا آنجا که ممکن است به صورت احتمالاتی دقیق مدل گردند. این متغیرهای تصادفی قبلاً به شکل متغیرهای گوسی مدل شده‌اند (یعنی تنها دو لنگر اول این متغیرها در مسئله به کار می‌رفت). چنین کاربردی در این مقاله نشان داده شد که همیشه مناسب نبوده و می‌تواند منجر به نتایج بی‌کیفیت گردند. به منظور افزایش کیفیت تخمین احتمال خرابی اولیه  $p_{f_0}$  و نیز نرخ برون‌گذری میانگین  $U_D^+$  پیشنهاد شد که توابع ( )  $f_{Z|A}$  و ( )  $F_{Z|A}$  با استفاده از تئوری پایه قابلیت اعتماد محاسبه گردند. این به آن معنا بود که روش شبیه‌سازی و یا روش FORM برای تخمین ( )  $F_{Z|A}$  مورد استفاده قرار گیرد و هم‌زمان ( )  $f_{Z|A}$  نیز در امتداد هر تابع حالت حدی محاسبه گردد.



شکل A-۱. رابطه میان ds و dz در فضای Y

که در آن  $n(Y)$  بردار واحد عمود بر (آبر) سطح  $Z=Z(Y)$  در نقطه  $Y=Y^*$  می‌باشد که نقطه تقاطع شعاع شبیه‌سازی شده  $B=\beta$  با (آبر) سطح  $Z=Z(Y)$  می‌باشد. از آنجا که مؤلفه‌های بردار واحد  $n(Y)$  از رابطه:

$$n_i(Y) = \frac{\partial Z(Y)}{\partial Y_i} / \sqrt{\sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial Z(Y)}{\partial Y_i} \right)^2} \Big|_{Y=Y^*}$$

به‌دست می‌آیند، رابطه بالا می‌تواند به شکل زیر کاهش یابد:

$$ds = \frac{dz}{|d(Y) \cdot \beta|} \tag{A-۴}$$

که در آن  $d_i(Y) = \partial Z(Y) / \partial Y_i (i=1,2,\dots,m)$ . اگر رابطه (A-۴) در رابطه (A-۲) جایگزین گردد و dz از دو طرف حذف شود آنگاه رابطه زیر برای  $f_{Z|A}(z^* | a)$  حاصل خواهد شد:

$$f_{Z|A}(z^* | a) = \left[ \int_{\text{unit sphere}} \left[ f_Y(s^* \beta + c) \frac{s^{*m-1}}{|d(Y) \cdot \beta|} \right] d\beta \right] \Big|_{A=a} \tag{A-۵}$$

یا به شکل جایگزین آن با استفاده از شبیه‌سازی جهتی خواهد شد:

$$f_{Z|A}(z^* | a) = \left\{ E_B \left[ f_Y(s^* \beta + c) \frac{s^{*m-1}}{|d(Y) \cdot \beta| f_B(\beta)} \right] \right\} \Big|_{A=a} \tag{A-۶}$$

$$F_{Z|A}(z^* | a) = \left[ 1 - \int_{\text{unit sphere}} \left[ \int_{S=s^*}^{\infty} f_Y(s\beta + c) s^{m-1} ds \right] d\beta \right] \Big|_{A=a} \\ = 1 - E_B \left[ \left[ \int_{S=s^*}^{\infty} f_Y(s\beta + c) \frac{s^{m-1}}{f_B(\beta)} ds \right] \right] \Big|_{A=a} \tag{A-۱}$$

که در آن  $E_B[\ ]$  امید ریاضی بر حسب توزیع B را نشان می‌دهد که بردار واحد تصادفی جهتی بوده و دارای تابع چگالی احتمال  $f_B(\beta)$  می‌باشد. همچنین در رابطه بالا،  $Y=SB+C$  در فضای Y (شبه آنچه که قبلاً برای Q نشان داده شده است) می‌باشد. نقطه C در اینجا بردار میانگین Y (یعنی  $\mu_Y$ ) در نظر گرفته می‌شود. ذکر این نکته از اهمیت برخوردار می‌باشد که فرمول‌بندی بالا فرض می‌کند که نقطه میانگین  $\mu_Y$  در دامنه‌ای قرار دارد که در آن  $Z(Y) < z^*$  (مشروط بر  $A=a$ ) می‌باشد. واضح است که اگر  $\mu_Y$  در منطقه‌ای باشد که  $Z(Y) > z^*$  باشد آنگاه مکمل رابطه (A-۱) به‌عنوان مقدار  $F_{Z|A}(z^* | a)$  در محاسبات وارد خواهد شد.

برای محاسبه تابع  $f_{Z|A}(z^* | a)$  تئوری احتمالات ارائه شده در [۷] استفاده خواهد شد که بر اساس آن سطح  $Z^* = Z(Y)$  در فضای Y به اندازه یک مقدار دیفرانسیلی dz نمو داده می‌شود (شکل (A-۱)) و محتوای احتمالاتی احاطه شده میان این دو سطح موازی محاسبه می‌گردد. با استفاده از عبارت (A-۱) می‌توان نتیجه گرفت که:

$$f_{Z|A}(z^* | a) dz = \left[ \int_{\text{unit sphere}} \left[ f_Y(s^* \beta + c) s^{*m-1} ds \right] d\beta \right] \Big|_{A=a} \tag{A-۲}$$

که در آن  $S = s^*$  فاصله میان مرکز و سطح  $Z = Z(Y)$  در فضای Y با فرض معلوم  $Z = z^*$  (در فضای Q) می‌باشد (شکل (۱۲)). از طرف دیگر، می‌توان نشان داد که مقدار دیفرانسیلی ds می‌تواند به مقدار dz با استفاده از رابطه زیر ارتباط یابد:

$$ds = \frac{dz}{|n(Y) \cdot \beta| \sqrt{\sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial Z(Y)}{\partial Y_i} \right)^2} \Big|_{Y=Y^*}} \tag{A-۳}$$



## ۸. مراجع

- [8] Winterstein, S. R. "Nonlinear Vibration Models for Extremes and Fatigues."; J. Eng. Mechanics, ASCE 1988, 114, 1772-1790.
- [9] Zhao, Y-G; Ono, T. "On the Problems of the Fourth Moments Method."; J. Structural Safety 2004, 26, 343-347.
- [10] Chen, X.; Tung, Y. K. "Investigation of Polynomial Normal Transform."; J. Structural Safety 2003, 25, 423-445.
- [11] Andrieu-Renaud, C.; Sudret, B.; Lemaire, M. "The PH12 Method: A Way to Compute Time-Variant Reliability."; Reliability Engineering & System Safety 2004, 84, 75-86.
- [12] Grigoriu, A. G. "Applied Non-Gaussian Processes."; Princeton Hall, Englewood, Cliffs, NJ, USA, 1995.
- [13] Moarefzadeh, M. R. "Non-Gaussianity of Structural Resistance in Directional Simulation in Load Space."; 13th IFIP WG 7.5 Working Conference on Reliability and Optimization of Structural Systems 2006, Kobe, Japan.
- [1] Melchers, R. E. "Load-Space Formulation for Time-Dependent Structural Reliability."; J. Eng. Mechanics, ASCE 1992, 118, 853-870.
- [2] Ditlevsen, O.; Bjerager, P.; Olesen, R.; Hasofer, A. M. "Directional Simulation in Gaussian Processes."; Probabilistic Engineering Mechanics 1988, 3, 207-217.
- [3] Ditlevsen, O.; Melchers, R. E.; Gluwer, H. "General Multi-Dimensional Probability Integration by Directional Simulation."; Computers and Structures 1990, 36, 355-368.
- [4] Melchers, R. E. "Radial Importance Sampling for Structural Reliability."; J. Eng. Mechanics, ASCE 1990, 116, 189-203.
- [5] Moarefzadeh, M. R. "Time-Dependent Reliability Analysis of Off-Shore Structures."; PhD Thesis, The University of Newcastle, NSW, Australia, 1995.
- [6] Moarefzadeh, M. R.; Melchers, R. E. "Sample-Specific Linearization in Reliability Analysis of Off-Shore Structures."; J. Structural Safety 1996, 18, 101-122.
- [7] Papoulis, A. "Probability, Random Variables, and Stochastic Processes."; McGraw-Hill, 3rd Edition, 1991.